DĚLITELNOST

Termín odeslání: 11. 12. 2017

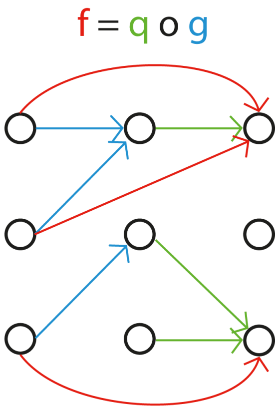
autoři: *Matouš a Dominik*

Úloha 2.1. Liběnka seděla na mezi s kukuřičným klasem a odlupovala jednotlivá zrnka. Dělala to už pěkně dlouho, když tu ji náhle napadlo, kolik nejméně kladných dělitelů může mít číslo, mezi jehož dělitele patří čísla 8, 9, 12, 20, 37, 45 a 111? Pomozte Liběnce s odpovědí na její otázku.

Úloha 2.2. Kouma a Ňouma zatím na pískovišti hrají hru. V písku je vyryto přirozené číslo n. Každý ve svém tahu číslo v písku zasype, odečte od něho nějakého jeho dělitele a výsledek znovu vyryje do písku. Prohraje ten, kdo do písku vyryje nulu. Kouma začíná. Pro která n má Kouma vítěznou strategii?

Úloha 2.3. Henry, koukaje na dovádějící děti, si užívá chvíle klidu a otevírá svůj deníček z ranných pubertálních let. Jak tak listuje, zaujme ho právě jedna stránka, kam si kdysi zapsal: Nechť M je množina přirozených čísel neobsahujících číslici 0. Definuj novou operaci na M tak, že pokud v definici dělitelnosti nahradíš násobení touto operací, bude mít každé n-ciferné číslo právě $n-1$ dělitelů. (Henry počítal s definicí z pomocného textu, dělitel je zde tedy levý dělitel.)

Úloha 2.4. Henry se zasnil až mu deníček spadl na zem. Ticho v tu chvíli prořízl výkřik v dáli a dramaticky zavál vítr, který otočil list deníčku na druhou stranu, na níž se skvěl další příklad: Nechť $M_n = \{f | f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}\}, n \in N$ je množina všech zobrazení z n-prvkové množiny do n-prvkové množiny a uvažujme operaci skládání. Kolik zobrazení z M_n „nedělí zleva“ identické zobrazení $g(x) = x$ na n-prvkové množině?(Levá a pravá dělitelnost jsou definovány v pomocném textu.) Existují nějaká dvě zobrazení z M_n, která jsou „zleva nesoudělná“ (tzn. taková, že mají jediného společného levého dělitele a to identické zobrazení)? Popište, jak vypadají praví a leví dělitelé zobrazení $f(x) = \lfloor \frac{x+2}{3} \rfloor$, kde $\lfloor a \rfloor$ značí dolní celou část čísla a.



Úloha 2.A. Liběnka se vrátila domů s plnými kapsami kukuřice pro své 4 křečky. Ti na ni už netrpělivě čekali náhodně rozestavení v pokojíčku. Jak tak kouká na těch 8 velkých očí, napadlo ji... "Hmm... křečci rádi běhají v kouli... Co kdyby byli všichni mí křečci v jedné kouli? A co kdybych měla nekonečně koulí takových, že v každé jsou všichni mí křečci přesně v tom rozestavení, jak teď jsou? Popište, jak by vypadal průnik těchto koulí!"

Úloha 2.B. Kouma s Ňoumou už změnili objekt svého zájmu - nyní si do písku kreslili šipky a kolečka. Nakreslili 7 koleček a 6 šipek mezi nimi:

$$\circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ$$

Dokreslete do písku další šipky tak, že z libovolného bodu do jiného vedou právě tři cesty po šipkách. Cestou po šipkách se rozumí posloupnost šipek, která respektuje jejich orientaci a každý bod je navštíven nejvýše jednou.

Úloha 2.C. Henry se sehnul na zem, aby zvedl svůj deníček, přičemž si nemohl nevšimnout, že mu kachličky na zemi (ano, celou dobu byl v koupelně) neuvěřitelně evokují celočíselnou mřížku. Přiřaďte každému jejímu mřížkovému bodu (bodu s celočíselnými souřadnicemi) přirozené číslo tak, aby:

- žádným 2 bodům nebylo přiřazeno stejné číslo
- na mřížce se nacházela všechna přirozená čísla
- pro libovolný obdélník s vrcholy v mřížkových bodech a se stranami rovnoběžnými s mřížkou platilo, že jeho obsah je menší nebo roven čtvrtině nejvyšší z hodnot přiřazených jeho vrcholům.

Pomocný text, další informace o semináři a detaily SPECIÁLNÍ PODZIMNÍ SOUTĚŽE najdete na stránkách brkos.math.muni.cz

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno
nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`