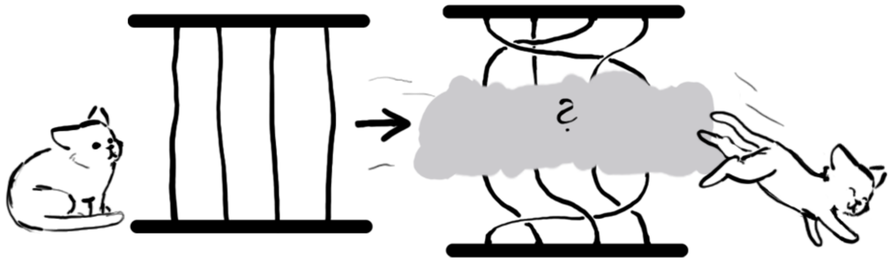
Zadání 1. série

Symetrie a rotace

Termín odeslání: 23. 10. 2017

Úloha 1.1. Kouma tkal koberec a upevnil si nitě ve stavu rovnoběžně. Leč stav mu skočila kočka an začala si s provázky hrát. Provázky sice zůstaly upevněné, však zašmodrchané. Výsledný stav vypadal takto. Doplňte prostřední část obrázku, tzn. nakreslete, kterak budou provázky napojeny a jak se budou křížit (pozor, záleží, který při křížení bude "dole"a který "nahoře").



Úloha 1.2. Kouma si hrál se svojí oblíbenou krychlí, která měla každou stěnu označenou lepítkem jiné barvy. Přišel Ňouma, krychli mu sebral a všechna lepítka mu sundal. To mu ale bylo málo, a tak dal krychli do zrcadlicí krabičky, jež někdy zrcadlově zobrací svůj obsah a jindy ne.

"Kéž bych si byl označil některé z vrcholů krychle, pak bych možná uměl lepítka vrátit na jejich původní místo"povzdechl si Kouma nad výsledkem Ňoumova řádění.

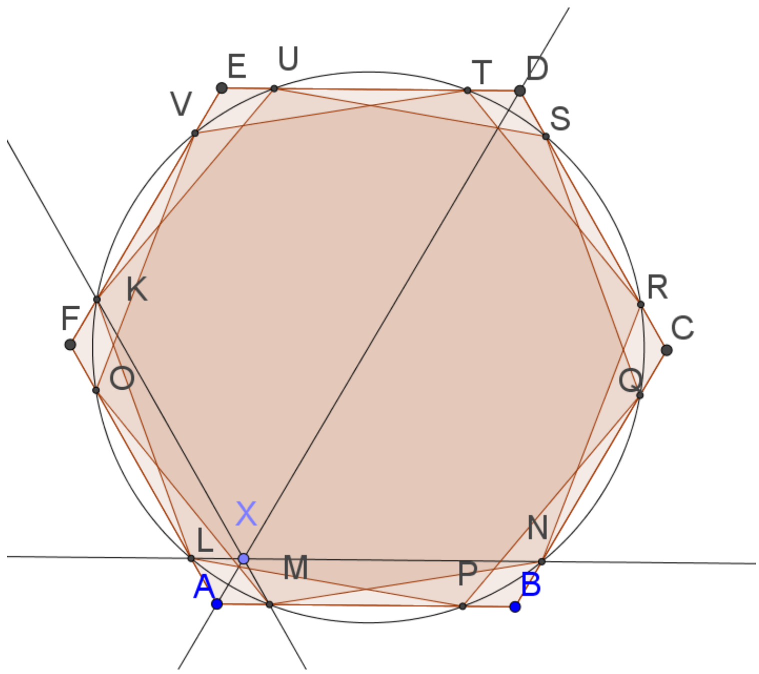
Existuje označení vrcholů jednou barvou (tedy vrchol buď je, nebo není označen), které by stačilo k jednoznačnému určení stěn, přestože Kouma neví, zda byla krychle zrcadlena, či ne?

Úloha 1.3. Henry se jednoho letního dne rozhodl vytvořit umělou sněhovou vločku.

Vločka má tvar pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$.

Na úhlopříčce AD si vyznačil bod X, kterým vedl dvě přímky, jednu rovnoběžnou ke straně AB, druhou ke straně AF. Průsečíky těchto přímek s okrajem vločky označil body K, L, M, N jako na obrázku níže.

Dokažte, že body K, L, M, N leží na kružnici, která protíná šestiúhelník v dalších 8 bodech O, P, Q, R, S, T, U, V. Dále dokažte, že útvary $OMNRTV$ a $KLPQSU$ jsou pravidelné šestiúhelníky.



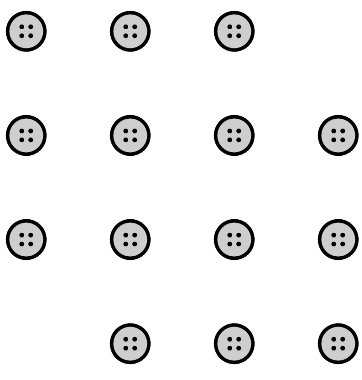
Úloha 1.4. Matěj, Liběnka a Henry hráli matematickou tichou poštu. Každý si tajně vymyslel vlastní kvadratický polynom (nenulový). Matěj vzal libovolné číslo, dosadil do svého polynomu a pošeptal výsledek Liběnce. Liběnka toto číslo dosadila do svého polynomu a pošeptala svůj výsledek Henrymu a ten provedl totéž a výsledné číslo vykřikl. Matěj neměl fantazii a vymyslel jen čísla $1, \dots, 8$. Velmi se podivil tomu, že Henry pokaždé vykřikl číslo 0. Ňouma šel kolem a pochlubil se tím, že už zná všechny tři polynomy. Mohl se tento příběh stát ve skutečnosti? Tedy existují kvadratické polynomy f, g, h takové, že řešením rovnice $f(g(h(x))) = 0$ jsou (mimo jiná) čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Úloha 1.A. Kouma před Ňoumu opatrně vyskládal bezrozměrné knoflíky do mřížky 4×4, odstranil knoflíky ze 2 protějších rohů a položil Ňoumovi otázku: "Kolik dalších knoflíků musím oddělat, aby žádné čtyři zbývající neutvořily čtverec?"

Ňouma bez váhání odpověděl: "Stačí oddělat tyto dva."

"Nechal se nachytat! Nechal se nachytat! Zapomněl jsi na šikmé čtverce!"začal zpívat Kouma.

Ukažte Ňoumovi, kolik nejméně knoflíků je potřeba oddělat, aby libovolné čtyři knoflíky neutvořily žádný, tedy ani šikmý čtverec.



Úloha 1.B. Bubla si hlasitě povzdechla.

"Copak?"začala se zajímat Liběnka.

"Mám kvadratickou rovnici $x^2 + ax + b = 0$, ale pro má celá čísla a, b nemá reálné řešení."

"A má řešení $\lfloor x^2 \rfloor + ax + b = 0$?"

Bubla se zatvářila zmateně, ale po krátké pauze vybuchla v nekontrolovatelný záchvat smíchu.

Existují celá čísla a, b taková, že rovnice $x^2 + ax + b = 0$ nemá reálné řešení, ale $\lfloor x^2 \rfloor + ax + b = 0$ má? ($\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které nepřevyšuje x.)

Úloha 1.C. Kouma a Ňouma stojí v počátku ovocného sadu. Jejich ovocný sad je celočíselná mřížka 2017×2017, ve které se v každém bodě mřížky kromě počátku nachází jabloň. Každý den si vyberou dvě přirozená čísla i, j, $i \neq j$, a vydají se do bodu (i, j). Kouma jde po přímce a Nouma chodí jen doprava a nahoru po mřížce. Pokud narazí do nějaké jabloně, vezmou si z ní jablko, i z jabloně v bodě (i, j). Kouma si všiml, že existuje množina čísel S taková, že pokud se vydají do bodu (i, j), $i, j \in S$, $i \neq j$, bude poměr počtu jablek, které nasbírají (Ňouma/Kouma) taky v S. Kolik prvků muže mít S?

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno
nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`