Zadání 4. série

Binární operace

Termín odeslání: 20.2.2017

autor: *Dominik*

Úloha 4.1. V Hloupětínské jaderné elektrárně došlo jednoho dne k úniku radioaktivního záření. Obyvatelé byli pro tento případ kvalitně vyškoleni v obraně proti zákeřným částicím, takže kromě Liběnky, Koumy, Ňoumy a Matěje, kteří hráli karty poblíž reaktoru, se nikomu nic nestalo. Tito 4 měli neobyčejné štěstí. Nejenom, že neutrpěli žádná zranění, ale jejich smysly se zbystřily a jejich jména už nezněla stejně jako předtím. Nyní to byli Srděnka, Kár, Křížnel a Pikant a stál před nimi nový úkol - opravit reaktor. Žádnému z hrdinů se moc nechtělo, protože všichni chtěli začít objevovat svoje superschopnosti. Naštěstí Křížnel zjistil, že umí přivolat tabuli a křídy, a tak přišel s nápadem:

„Na tabuli nakreslíme vedle sebe symboly $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ a $\spadesuit$. Operace $\bullet$ zadaná tabulkou bude spočívat v tom, že smažeme první a druhý symbol z leva a místo nich nakreslíme symbol jim odpovídající. Operaci provedeme celkem třikrát, na tabuli pak zůstane pouze jediný symbol. Čí symbol to bude, ten musí reaktor opravit.“ Křížnel se nabídl, že tabulku operace $\bullet$ vymyslí a ostatní se shodli, že tabulka musí splnit následující podmínky:

(i) tabulka bude obsahovat stejný počet $\heartsuit, \diamondsuit$ a $\spadesuit$
(ii) $\clubsuit$ je v tabulce více než jiného symbolu
(iii) operace $\bullet$ je komutativní
(iv) na diagonále musí být symboly $\clubsuit$ (viz. tabulka)

$\bullet$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$			
$\diamondsuit$		$\clubsuit$		
$\clubsuit$			$\clubsuit$	
$\spadesuit$				$\clubsuit$

Podaří se Křížnelovi doplnit tabulku tak, že při libovolném počátečním pořadí symbolů na tabuli nezůstane nikdy symbol $\clubsuit$ jako poslední, a Křížnel se tak vyhne povinnostem? Najděte alespoň jeden způsob, jak tabulku doplnit.

Úloha 4.2. Během opravy reaktoru se Křížnel rozhodl, že se v tomto příběhu stane zápornou postavou. Vymyslel novou binární operaci $\clubsuit$ na nezáporných celých číslech, která Hloupětínským úplně zamotala hlavu. Operace měla následující vlastnosti:

Nechť x a y jsou libovolná nezáporná celá čísla:
(i) $(x+1) \clubsuit 0 = (0 \clubsuit x) + 1$
(ii) $0 \clubsuit (y+1) = (y \clubsuit 0) + 1$
(iii) $(x+1) \clubsuit (y+1) = (x \clubsuit y) + 1$.

Hrdinové navíc věděli, že $2016 \clubsuit 2061 = 6210$. Nyní už nebyl problém cokoliv spočítat a Hloupětín byl zachráněn. Umíte také s touto operací počítat? Kolik je $2601 \clubsuit 1620$?

BRKOS Team 2016

Úloha 4.3. Křížnel však zanedlouho začal znovu škodit. Ukradl všechna celá čísla a zamčel je ve svém doupěti. Hrdinové se vydali čísla zachránit. Srděnka si ale uvědomila: „Všechna čísla přece zachránit nemůžeme, vždyť je jich nekonečně mnoho!“ Na to jí odpověděl Kár: „Neboj, stačí zachránit jen pár kladných čísel. Vymyslel jsem operaci $\diamondsuit$, která dvěma celým číslům x a y přiřadí číslo $x \diamondsuit y = x + xy - 2y$.“ Kolik nejméně musí zachránit kladných celých čísel $x_1, x_2, \cdots, x_n$, že pomocí nich a opětovného používání Károvy operace $\diamondsuit$ lze vytvořit libovolné celé číslo? Operovat můžeme na libovolném počtu kopií $x_1, x_2, \cdots, x_n$ v libovolném pořadí a při libovolném uzávorkování.

Úloha 4.4. Vchod do Křížnelova doupěte bránilí zlí Operantauři, které Křížnel stvořil. Měli ale slabost pro nevídané matematické dovednosti. „Necháme vás projít, jen když nám zvládnete dokázat jednu maličkost. Nechť $\circledast$ je binární operace na konečné množině M splňující následující:

(i) $\circledast$ je komutativní

(ii) v M existuje prvek p takový, že pro všechny prvky $x \in M$ platí $x \circledast x = p$

(iii) pro každé $x, y \in M$ existuje nejvýše jedno $z \in M$ tak, že $x \circledast z = y$

Nechť $n > 2$ je počet prvků M. Dokažte nám, že taková operace existuje pro nekonečně mnoho n.“

Úloha 4.5. Poté co se hrdinové dostali dovnitř, šli temnou chodbou. Kár si zpíval a Pikanta trochu mrzelo, že se v příběhu objeví už jen jednou. „Podívejte, to je zvláštní pavučina!“ vyhrkl Kár. Pavučina měla tvar obdelníku s oběma úhlopříčkami. „Víte, že když pavouk sedí v kterémkoliv bodě na některé ze stran obdélníku, tak součet kolmých vzdáleností toho bodu od obou úhlopříček je vždy stejný?“ Ukažte, že má Kár pravdu.

Úloha 4.6. Jak šli, Pikant byl stále smutnější a v tento moment se dokonce rozbrečel. Ostatní se ale zaradovali, neboť uviděli na zemi ležet dvojici reálných čísel $(a_{100}, b_{100}) = (2, 4)$. Kousek dál byla (a_{99}, b_{99}) a za ní spousta dalších. Byla jich celá posloupnost. Také si všimli, že posloupnost splňuje $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (\sqrt{3}a_n - b_n, \sqrt{3}b_n + a_n)$ pro $n \geq 1$. Jaký je součet $a_1 + b_1$?

Úloha 4.7. Než došli k poslední dvojici, Srděnka zjistila, že ji superschopnosti pomalu opouští. Stejně tak Kár. Když došli k poslední dvojici, seděl tam schopností a zloby zbavený Křížnel. Všechna čísla už pustil a jako omluvu dokázal pro Srděnku jedno zajímavé tvrzení. „Den mi připadá kvadratický, pokud jsme na světě k dní a existuje takové celé číslo a, že $2017 \mid k - a^2$. Jiné dny jsou nekvadratické. Srděnko, ty jsi o n dní mladší. Nastane někdy den, který bude pro nás oba kvadratický nebo pro oba nekvadratický? Dokázal jsem, že tomu tak určitě nastane.“ Dokážete to taky?

Bonusová úloha. Srděnku náhle chytlo u srdíčka, že už je úplně bez schopností. „Už jsem zase jenom obyčejná Liběnka,“ řekla smutně. Obyčejný Matěj ji začal utěšovat: „Když už nemáme superschopnosti, tak si aspoň můžeme udělat kostým. Nebude to však kostým pro superhrdiny, bude to kostým pro metematiky.“ Navrhněte, jak by mohlo vypadat tričko pro správného matematika.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`