Zadání 2. série

TEORIE HER

Termín odeslání: 5.12.2016

autor: *Vojta a Martin*

Úloha 2.1. V hloupětínské továrně strýčka Františka se přeli dva zaměstnanci. "Na další experiment potřebujeme právě sudě kádinek se zásadou!", tvdil první. Druhý oponoval: "Blázníš? Vždyť vybouchneme! Liše!"Nalezněte vítěznou strategii pro prvního zaměstnance v následující hře: Máme v řadě 16 kádinek, v první je kyselina, ve druhé zásada, ve třetí kyselina, ve čtvté zásada atd. Hrají dva zaměstnanci proti sobě. Zaměstnanec ve svém tahu vybere dvě sousední kádinky a má dvě možnosti: buď slije obě kádinky do jedné a na místo původní dvojice vloží novou směs, nebo mezi ně vloží zarážku. Smícháním kyseliny s kyselinou vznikne kyselina. Smícháním zásady s kyselinou vznikne kyselina, smícháním dvou zásad vznikne zásada. Kádinky, mezi kterými je zarážka nelze vybrat do dvojice. Hra končí, až už jsou všechny zbylé kádinky odděleny zarážkami. Začíná první zaměstnanec a vyhraje, pokud je počet kádinek se zásadou na konci sudý.

Úloha 2.2. S rozvojem chemického průmyslu bylo v Hloupětíně třeba zlepšit dopravu, a tak se rozhodli, že postaví letiště. Kouma a Ňouma se přihlásili na pozici leteckých dispečerů. Dostali tak dohromady na starost simulátor letového provozu. Ten funguje takto:

Letový prostor je rozdělen na $n+1$ letových hladin, očíslovaných $0, 1, \ldots, n$ v pořadí zvětšující se vzdálenosti od země. V prostoru je $k \leq n$ letadel, každé na nějaké hladině, ale na jedné hladině se nachází maximálně jedno letadlo. Kouma se střídá s Ňoumou v udílení pokynů letadlům. Pokyn spočívá v tom, že řekne nějakému letadlu, aby sestoupilo na nějakou alespoň o 1 nižší hladinu než stávající. Pokud se na dané hladině již nachází letadlo, pak se letadla srazí (což nevadí) a z každého letadla vyletí 3 padáky (celkem tedy 6), které se drží na letové hladině srážky. Poté už mohou Kouma s Ňoumou udílet pokyny i padákům, ale padáků může být na letové hladině neomezeně a s letadly také neinteragují (nesráží se). Simulátor končí, pokud je letový prostor volný (všechna letadla i padáky jsou na hladině 0, nebo zničená při srážce). Prohrává ten hráč, který už nemá komu udělit pokyn. První pokyn udílí Kouma.

Určete, za jakého iniciálního rozestavení letadel má vítěznou strategii Kouma a za jakého Ňouma.

Úloha 2.3. Hloupětínští starousedlíci se ale rozhodli, že letadla nad hlavami kvůli hluku nechtějí, a tak ukradnou letadlům vrtule. Žádnému ze dvou vybraných zlodějů se do toho ale nechtělo kvůli velkému riziku a tak se dohodli, že se rozhodne pomocí oblíbené hry kámen–nůžky–papír–bomba. Ta funguje stejně jako naše hra kámen–nůžky–papír s tím rozdílem, že je přidána ještě bomba, která porazí papír, remizuje s kamenem a prohraje s nůžkami. Oba zloději se zamysleli, jak hrát, aby byla co nejmenší pravděpodobnost, že bude vybrán. Jsou však vyškoleni spíše v kradení než v matematice. Pomůžete jim nalézt vítěznou, nebo alespoň neprohrávající strategii? A dokážete takové strategie najít všechny?

BRKOS Team 2016

Za strategii považujme 4 nezáporná reálná čísla k, n, p, z, $k+n+p+z = 1$, která určují, s jakou pravděpodobností hráč daný nástroj zahraje. Můžete předpokládat, že soupeřova strategie je stejného tvaru (také si volí, s jakou pravděpodobností bude hrát který nástroj). Za vítěznou považujeme takovou strategii, která má větší pravděpodobnost výhry, než prohry (nezáleže na soupeřově strategii). Za neprohrávající považujeme takovou, která má proti každé strategii alespoň stejné šance na výhru jako prohru.

Úloha 2.4. Vybranému zloději se však vrtule ukrást nepodařilo a zmizel neznámo kam. Druhý zloděj nedopadl o moc slavněji. Policie jej dopadla záhy a připojila na detektor lži. Ten fungoval tím způsobem, že testovanému byla předložena hra a on se nacházel ve výherní pozici. Pokud nelhal, tak se mohl soustředit na hru, najít vítěznou strategii a vyhrát. Pokud ale lhal, nedokázal se dostatečně soustředit na hru a prohrál. Hra vypadala následovně: hráli proti sobě podezřelí a policista a pravdilně se střídali. Ve hře byli dvě hromádky kamenů s a, b počty kamenů, $a, b > 0$. Hráč na tahu mohl odebrat právě přirozený násobek počtu kamenů první hromádky z druhé hromádky (druhá hromádka tedy musela být alespoň tak velká jako první). Hra skončila, když byla jedna z hromádek vyprázdněna a vyhrál hráč, jež provedl poslední tah. První tah má podezřelý. Určete, pro která $q \in \mathbb{R}^+$ má podezřelý vždy vítěznou strategii, pokud je na začátku v hromádkách a, b kamenů a tyto počty splňují nerovnost $a > qb$. Vyřešte tuto úlohu a dokažte tím svou nevinu!

Úloha 2.5. Nato se starosta Hloupětína usnesl, že na oslavu roku 2016, kdy byla potlačena vzpoura starousedlíků v Hloupětíně, budou mít všechny *letošní* roky o 2 měsíce delší prázdniny. Za letošní byl prohlášen ten rok jehož nějaký celočíselný násobek (jeho pořadového čísla) začíná v dekadickém zápise číslicemi 2016. Ukažte hloupost starosty tím, že dokážete, že každý rok je letošní (rok 0 neexistoval ani v Hloupětíně).

Úloha 2.6. Když se ukázala starostova tupost, byl svolán sněm, kde se měl zvolit starosta nový. Dle platných zákonů se tak provádělo hrací kostkou. Již byl okamžik před vrhem, když do místnosti vtrhl Henry, který byl zrovna na pracovní cestě, volaje: "Zastavte to šílenství! Dokažte mi radši, že každý konvexní mnohostněn má alespoň 2 stěny o stejném počtu hran!"Zkuste to také, třeba vás pak zvolí za starostu Hloupětína.

Úloha 2.7. Starosta však nečekaně překvapil a úlohu vyřešil ze všech v sále jako první. Nechali jej tedy dále starostovat. Když se starosta loučil s Henrym, půjčil Henrymu kapesník, neboť se Henry kvůli podzimnímu ochlazení nachladil. Když poté starosta převzal kapesník zpět, zjistil, že se na něm zračí následující úloha:

Najděte všechny prosté funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující $f(f(n)) \leq \frac{n+f(n)}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Starosta dal tuto úlohu vytesat na základní kámen radnice, chtěl však přidat i řešení, které mu ale nikdo nebyl schopen dodat. Budete schopni vy?

Bonusová úloha. Hloupětníštní jsou velmi zapomnětliví obyvatelé. Proto vymyslete nějakou hru (ideálně na matematické téma, nebo třeba zajímavou hru k řešení v teorii her), ke které není potřeba žádných dalších nástrojů. Stačí tedy hráči a jejich velmi omezená paměť (šachy popaměti nechceme).

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2

BRKOS Team 2016

611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
http://brkos.math.muni.cz/

BRKOS Team 2016