

Zadání 1. série
BRKOS

Termín odeslání: 24.10.2016

téma: *Úvodní guláš*

BRKOS neboli Brněnský korespondenční seminář je matematická soutěž pro středoškoláky se zájmem o matematiku. Dává vám možnost zdokonalit se ve formulaci svých myšlenek a také poměřit síly s ostatními řešiteli. Aktivní řešitelé mohou jet dvakrát za rok na týdenní soustředění plné her, zábavy a nových známostí. Ti nejlepší z vás se mohou těšit na opravdu hodnotné ceny, jako například fotoaparát, velké deskové hry, externí disk anebo Kindle. Navíc za každý řešený příklad můžete získat kartu z matematické karetní hry Kabrňáci! Více informací na našich webových stránkách <http://brkos.math.muni.cz/>.

Takže neváhejte, přečtěte si zadání, sepište alespoň částečné řešení nějaké úlohy a zapojte se ještě dnes!

Úloha 1.1. „Gulášgvhevnmjdfs!“ , ozvalo se už o něco hlasitěji hladové monstrum dychtící po Liběnině specialitě. „Henry! Víš moc dobře, že ti nedám, dokud neuhodneš, na co myslím! Malinko ti ale napovím. Myslím si celé číslo x od 1 do 10. Aby jsi zjistil, které to je, můžeš mi pokládat speciální dotazy. Jeden dotaz se skládá ze dvou celých čísel m, n od 1 do 10 a já odpovím největším společným dělitelem čísel m a $n + x$. Podaří se ti vždy uhádnout mé číslo pomocí 4 dotazů?“

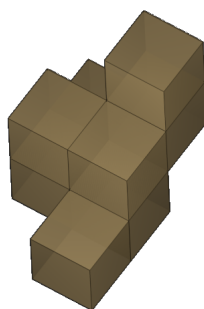
Úloha 1.2. „Ale Liběnko! Přece bys mě nenechala vyhladovět!“ , vrhnul Henry na Liběnkou psí pohled. Liběnka má pro zvířátka slabost. Koukla na guláš, pak na Henryho, pak zase na guláš. „Dobře. . . Tak já ti teda dám, ale překvapuje mě, že nemáš žádné eso v rukávu.“ „To ale není pravda!“ , oponoval Henry. „Mám dva stejné balíčky karet po 52 kartách. Každý balíček nějak zamíchám a pološím jeden na druhý. Ty pak pro každou dvojici stejných karet z obou balíčků spočítáš počet karet mezi nimi. Všechna tato čísla sečteš. Jaké čísla můžeš dostat?“

Úloha 1.3. „Teď s mě dostal Henry“ , zasmála se Líba, vzala veliký talíř a pořádně Henrymu naložila. Ten spokojeně zbaštil pár prvních soust, aby zaplnil prázdný žaludek a pak si toho všiml. V tom guláši byla písmenka! Ba ne. . . to nebyla písmenka, to byla čísla. Každá číslice právě jednou. Henryho nenapadlo nic chytřejšího, než z těchto číslic vytvořit přirozené číslo (číslíce, které se mu nehodily, snědl). A protože ho bavilo se v tom guláši ráchat, přeuspořádal zbylé číslice, dokud nevytvořil všechna množná čísla vzniklá jejich kombinací. Pokud pak všechna tato čísla (včetně původního) byla po dvou nesoudělná, nazval původní číslo „drsné“. Kolik různých drsných čísel mohl vytvořit, pokud měla Liběnka dost guláše na přidání?

Úloha 1.4. „Mohl bys teď, prosím, umýt nádobí?“ , zeptala se po vydatné snídani/obědu/svačině Liběnka. Z Henryho vyprchalo gulášové nadšení. „Jak se tak na ty dva 2016-úhelníkové talíře se stejným obsahem a všemi stranami a úhlopříčkami menšími než 1 koukám, nebude

jednoduché je dát do odkapávače.“ „Podívej, Henry, když budou každé každé dva vrcholy různých talířů od sebe vzdálené alespoň $\frac{1}{\sqrt{2}}$, určitě se to tam vleze.“ „Nevěřím, dokaž to!“ Pomozte Liběnce a dokažte, že tyto 2016-úhelníky v rovině nebudou sdílet vnitřní bod.

Úloha 1.5. Talíře nějak zvládli, ale bylo tam ještě další nádobí. Obzvlášť tyhle podivné kostičky, o kterých vůbec Liběnka nevěděla, že je má ve své kredenci. Dokázali byste s nimi vyplnit prostor? Jak?



Úloha 1.6. „Konečně je vše uklizeno a můžeme se jet bavit!“ Liběnka s Henrym se rozhodli, že pojedou na turnaj. Henry řídil, ale protože byl tak natěšený, že jel trochu rychleji, než by měl, zastavili je policajti. „Dobrý den mladý muži, budete mi tady muset fouknout do balónku.“, povídá švihácký policista. „Dobrý den! A pomůžete pak i vy nám? Máme 40 balónků. Tlak v každém z nich je neznámý. Můžeme si vždy vybrat maximálně 5 balónků a vyrovnat v nich tlak na aritmetický průměr původních velikostí tlaků. Ukažte, že lze vyrovnat tlak ve všech 40 balóncích.“

Úloha 1.7. Když všichni dofoukali, rozloučili se a Henry s Liběnkou upalovali na turnaj. Koná se turnaj n hráčů. Navrhněte zápasy, tak aby jejich počet byl co nejmenší a v každé trojici hráčů byli dva, co spolu hráli.

Bonusová úloha. „Ještě že jsou ty prázdniny“, připomenul Henry Liběnce na zpáteční cestě. „Škoda, že se letos nechystáme nikam daleko. Moc by se mi líbilo mít na toto léto nějakou exotickou vzpomínku, jenom se bojím, že bych na dovolené neměla dost matematiky“. Ukažte Liběnce, že je všechno možné a vyfotťe se o prázdninách na co nejzajímavějším místě s co nejvíce (avšak minimálně 5) věcmi připomínajícími matematiku. Všechny je sepište a pošlete i s fotkou.

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS

Přírodovědecká fakulta MU

Kotlářská 2

611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

<http://brkos.math.muni.cz/>

