Zadání 6. série

# Nerovnosti

Termín odeslání: 2.5.2016

autor: *Stopa*

**Úloha 6.1.** Liběnka s Matějem už se zase dohadovali. Oba dostali od Henryho nenulová reálná čísla. Liběnka si z nich vyrobila číslo $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$, zatímco Matějovi stačilo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Samozřejmě se dohadovali, kdo má číslo větší. Rozsoudil je až Henry, když prohlásil, že to stejně záleží jen na znaménku $a+b$. Zkuste tuto skutečnost dokázat.

**Úloha 6.2.** To Bubla si lámala hlavu s jiným problémem. Zvolila si tři ostré úhly $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a snažila se dokázat, že pro ně platí

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}.$$

Pomozte Buble tento problém vyřešit.

**Úloha 6.3.** Poté, co si své nerovnosti všichni čtyři řádně urovnali, vrhli se společně na trojici kladných reálných čísel $u, v, w$. Zjistili, že ať už je volí jakkoliv, vždycky je výraz

$$\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c}{a+b+2c}$$

menší nebo roven $\frac{3}{4}$. Dokažte to.

**Úloha 6.4.** Matěj u příkladu nevydržel moc dlouho a už ho napadaly další úpravy. Tentokrát si vzal hned $n$ reálných čísel, ale všechny uvnitř kladného intervalu $[a, b]$, takže při jeho označení platilo $0 < a \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$. Matěj pak hravě dokázal, že

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\leq\frac{n^2(a+b)^2}{4ab}.$$

Dokažte to také.

**Úloha 6.5.** Koumu nerovnosti zase tak moc nezajímaly. Raději si vyšel do přírody. Procházel se na louce, obdivoval broučky a hlavně Hloupětínské berušky šestitečné. Tyto berušky měly na krovkách šest teček, které byly navíc propojeny celkem deseti čarami (taková čára vždy spojovala právě dvě tečky). Kouma si brzy všiml, že na každé berušce je taková trojice teček, že každá tečka z této trojice je spojena s ostatními dvěma tečkami v trojici. Přišlo mu to zvláštní, a tak přemýšlel, jestli to tak musí být vždy. Najděte odpověď a řádně ji dokažte.

**Úloha 6.6.** V Hloupětíně na náměstí Lichoběžníku (ve tvaru lichoběžníku) se chystal start Hloupětínského maratonu. Měl být tvořen velkou ozdobnou páskou, táhnoucí se napříč náměstím a dělící náměstí na dva čtyřúhelníky. Jak mají Hloupětínští pásku táhnout, jestliže chtějí rozdělit náměstí na dva tětivové čtyřúhelníky (čtyřúhelníky, kterým lze opsat kružnici) a jestliže navíc kružnice opsané těmto čtyřúhelníkům mají mít stejný poloměr?

*BRKOS Team 2016*

**Úloha 6.7.** Ňouma se chtěl maratonu zúčastnit, ale vyrušilo ho tvrzení, že ke každému přirozenému číslu $k \geq 2$ lze vybrat taková celá čísla $a, b, a > b$, že výraz $n^a - n^b$ bude dělitelný $k$ pro všechna přirozená čísla $n$.

**Bonusová úloha.** V Lenošíně na úřadě řešení měli pořádný nepořádek v papírech. Každý posílal svoje řešení jak se mu zachtělo a vše vypadalo nepřehledně a nejednotně. Lenošínští proto vypsali soutěž na vytvoření jednotné šablony pro řešení vypsaných úloh. Přidejte se i vy se svým návrhem na šablonu pro řešení Brkosích úloh. Šablona by měla obsahovat políčka pro všechny důležité informace jako jméno, číslo úlohy, atd. a měla by být náležitě stylizovaná. Může být v libovolném formátu (LaTeX, Word,...), nicméně submitovátko zchroustá jen formát PDF, takže ji případně zašlete na emailovou adresu.

**Svá řešení posílejte na adresu:**
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

**nebo uploadujte na našich stránkách:**
`http://brkos.math.muni.cz/`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ