Zadání 5. série

Polynomy

Termín odeslání: 28.3.2016

autor: *Vojta*

Úloha 5.1. Matěj s Liběnkou hráli hru. Na začátku měli obecný normovaný polynom stupně 2016:

$$P(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Střídali se na tahu a v každém tahu přiřadili jednomu z koeficientů $a_0, \ldots, a_{2015}$ konkrétní reálnou hodnotu (reálné číslo). Začíná Matěj. Po 2016 tazích jsou všechny koeficienty určeny, hra končí a P(x) se stává konkrétním polynomem. Pokud je na konci číslo 2016 kořenem, vyhrává Liběnka, v opačném případě vyhraje Matěj. Kdo má v této hře vítěznou strategii (tj. může hrát tak, že vždy vyhraje, ať už hraje druhý hráč jakkoliv)?

Úloha 5.2. Henry měl jiné starosti. Měl polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$, jehož kořeny si označil jako α, β, γ a chtěl najít polynom, jehož kořeny by byly α^3, β^3, γ^3. Pomožte mu s tímto úkolem.

Úloha 5.3. K jejich polynomiálním radovánkám se přidala i Bubla, když si přinesla všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty a alespoň jedním reálným kořenem, které splňují

$$P(P(x)) = P(x)^{2016}$$

. Určete všechny Bubliny polynomy.

Úloha 5.4. Nakonec dali všichni hlavy dohromady a přišli s polynomem $P(x)$ stupně n, který splňuje

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n$. Jaká je hodnota $P(n+1)$?

Úloha 5.5. Kouma už má polynomy dávno na háku, a tak se raději věnoval tabulce 3×3. Chtěl ji vyplnit čísly 1 až 9 tak, aby součet libovolných dvou sousedních polí (sousedících přes hranu) byl prvočíslo. Mohlo se mu to podařit?

Úloha 5.6. Na lenošínském náměstí tvaru trojúhelníku ABC chtěli postavit nový chodník. Ten měl vést z bodu A po straně AB až k bodu X, pak přímo k bodu Y na straně BC a nakonec po této straně k bodu C. Navíc mělo platit $|AX| = |XY| = |YC|$. Jak mohou lenošínští stavitelé zkonstruovat body X a Y, jestliže mají jen pravítko a kružítko (ač dostatečně velká).

Úloha 5.7. V Hloupětíně zavedli novou sociální síť FejsBRK. Umožňovala obyvatelům Hloupětína přidat si jiné obyvatele mezi své přátele. Takovéto přátelství bylo vzájemné. Dokažte, že v Hloupětíně je takový člověk, že průměrný počet přátel všech jeho přátel není menší než průměrný počet přátel všech obyvatel Hloupětína.

BRKOS Team 2016

Bonusová úloha. Hloupětínští už se začali trochu ztrácet v tom, kdo je kdo, kdo je vlastně Matěj, kdo je Liběnka a Bubla a jak se k tomu všemu má Henry. Nemluvě o Koumovi a Ňoumovi. Prozkoumej BRKOSí archív, najdi o našich hlavních postavách co nejvíce informací a pomož hloupětínským udělat v tom jedou pro vždy pořádek.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ