Zadání 4. série

OBARVOVÁNÍ

Termín odeslání: 22.2.2016

autor: *Alča a Moutes*

Úloha 4.1. Matěj si hrál se svou přímkou. Obarvoval ji dvěma barvami, ale ať ji obarvoval jak chtěl, vždycky na ní našel tři body stejné barvy, z nichž jeden byl středem zbylých dvou. Zvládnete dokázat, že to platí pro každé dvoubarevné obarvení přímky?

Úloha 4.2. Liběnka Matěje a jeho přímku zahanbila, když si přinesla rovnou celou rovinu. Půjčila si od Matěje jeho dvě barvy a v dvoubarevné rovině pak hledala také trojici bodů stejné barvy, tentokrát však tvořící rovnostranný trojúhelník. Dokažte, že jej lze najít v každém takovém obarvení.

Úloha 4.3. Po obědě se ke dvojici připojila i Bubla se svou vlastní rovinou. Bubla si svou rovinu obarvila takovým způsobem, že každá přímka v této rovině obsahovala body právě dvou barev. Na vás je určit, kolika barvami mohla být rovina obarvená. (Nezapomeňte na zdůvodnění, proč pro jiné počty barev takto rovinu obarvit nelze.)

Úloha 4.4. K večeru se z práce vrátil Henry a všem vyrazil dech, když si začal obarvovat rovnou celý prostor. Každý bod v prostoru obarvil buď červeně, modře nebo zeleně. Potom si na červený papír zapsal všechny vzdálenosti některých dvou červených bodů a podobně to udělal s modrým a zeleným papírem (pro modré a zelené body). K jeho úžasu však ať už prostor obarvil jakkoliv, vždy jeden z papírů obsahoval všechna kladná reálná čísla. Vaším úkolem je toto tvrzení dokázat.

Úloha 4.5. Kouma s Ňoumou nemají barvičky moc rádi. K ostatním se proto nepřipojili a raději si hráli s přirozenými čísly z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n\}$. Ňouma se snažil dokázat, že kterýchkoliv $n+1$ z nich obsahuje p, q taková, že p a q jsou nesoudělná, zatímco Kouma dokazoval, že mezi libovolnými $n+1$ z nich umí najít r, s taková, že r je celočíselným násobkem s. Vy určitě zvládnete dokázat obě tvrzení.

Úloha 4.6. Když Ňoumu omrzela přirozená čísla, řekl Koumovi, že našel nenulová reálná čísla x, y, z, jejichž součet je různý od nuly a která splňují

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}.$$

Kouma z toho hned poznal, že některá dvě z těchto čísel se liší jen znaménkem. Dokažte to.

Úloha 4.7. Z Lenošína do Hloupětína přišlo poštou liché přirozené číslo k a také přirozené číslo n. Hloupětínské nenapadlo nic lepšího, než spočítat výraz $2 \cdot (1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k)$ a poslat ho zpět. V Lenošíně pak zjistili, že toto číslo je dělitelné číslem $n(n+1)$. Podaří se vám to dokázat?

BRKOS Team 2015

Bonusová úloha. Matěj, Liběnka, Bubla i Henry jsou matematici a mohou si tak jejich nekonečné útvary obarvovat jak chtějí. Ve skutečnosti jsme však při obarvování omezení jednak velikostí útvaru (místo přímek úsečky, místo rovin plátno atd.), druhak velikostí štětce, pastelky fixy nebo čímkoliv obarvujeme (existuje tedy jakási nejmenší ploška, která má jedinou barvu). Zauvažujte nad tím, jak by se úlohy z pomocného textu a série změnily, pokud bychom tato omezení započetli.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ