Zadání 2. série

DŮKAZY

Termín odeslání: 7.12.2015

Zatímco první série je nazvaná Úvodní guláš, a jde tak o směsici všelijakých úloh z různých koutů matematiky, druhá série má téma Důkazy a první čtyři úlohy jsou zaměřeny právě na techniku matematického důkazu. Pro lepší pochopení, jak vlastně matematický důkaz funguje a jaké typy důkazů lze zvolit doporučujeme přečíst pomocný text, který je společně s tímto zadáním dostupný na našich stránkách: `http://brkos.math.muni.cz/`.

Úloha 2.1. Ňouma, který se pravidelně účastní Piškvorkové olympiády, si během každodenního tréninku na standardním čtverečkovém papíru (čtverečky o straně délky 1) všimnul zajímavé skutečnosti. Do této mřížky vyznačil tři průsečíky A, B, C. Vzdálenosti těchto bodů byly celočíselné. Zjistil, že obvod vzniklého trojúhelníku ABC je sudý. Dokažte, že toto tvrzení opravdu platí.

Úloha 2.2. Liběnka nedávno navštívila vysokoškolskou přednášku z matematiky, kde přednášející předváděl údajně snadný příklad. Dlouho se ztrácela v jeho zadání a právě teď se zdá, že zadání pochopila. „Pan profesor řešil příklad, kde vyšel z tvrzení, že $2n+1$ je druhá mocnina přirozeného čísla a pomocí něj dokázal, že výraz $n+1$ je součtem dvou druhých mocnin po sobě jdoucích přirozených čísel.“ Jelikož Liběnka ještě na vysokou nechodí a povedlo se jí tento příklad vyřešit, zkuste to také a pošlete důkaz příkladu, který profesor předváděl.

Úloha 2.3. Bubla o prázdninách měla jiné starosti, než hledání zajímavých her nebo rébusů na dlouhé zimní večery. Čekala ji odložená zkouška na medicíně. A jak se neustále učila o různých nemocech a zraněních a o postupech operací, napadla ji také jedna operace, avšak matematická. O operaci $(a)_b$ (b působící na a) si poznamenala, že pokud $(a)_b = c$, pak také $(b)_c = a$. Chvilku si s touto operací hrála, ale potom si uvědomila, že se musí dále učit. Na papíře zůstal nadepsaný vztah $a = ((a)_a)_a = (\dots(a)_a\dots)_a$ (sudý počet provedení operace), který zbývá na vás, abyste jej dokázali.

Úloha 2.4. Liběnka objevila svůj umělecký talent a začala se svědomitě věnovat malbě. Zaujala ji technika pointillé, kterou se zdobily například zbraně. Dekorace vznikala pomocí dírek z nichž se skládaly obrazce, podobně jako z mozaiky. Liběnka se rozhodla, že tuto techniku vyzkouší, ale jelikož nemá žádnou zbraň, bude malovat na plátno. Plátno si napnula, aby tvořilo rovinu, a namalovala do něj n modrých a n červených bodů a to tak, že žádné tři body neležely na jedné přímce. Ale jako každý velký umělec, nedržela se zaběhnutých pravidel a rozhodla se každý modrý bod spojit s červeným. Dokažte, že lze spojit, vždy modrý s červeným, n úsečkami tak, aby se žádné dvě z těchto úseček neprotínaly.

Úloha 2.5. Henry o prázdninách navštívil incké vykopávky v Peru a během nich vyslechl zajímavý příběh o tajemném pokladu pevnosti Vilcabamba. Údajně se našla stříbrná destička s vyrytými několika prvočísly. Na zdivu se potom objevil výraz $2015! + 2016!$. Odborníci tuší jistou spojitost mezi nápisem na zdivu a destičkou, ale nikomu se tento rébus spojený s pokladem zatím nepodařilo vyřešit. Henry dostal nápad najít největší prvočíslo, které výraz $2015! + 2016!$ dělí. Najděte toto prvočíslo a třeba najdete i poklad. (Výraz $n!$ se čte „n faktoriál“ a značí součin všech přirozených čísel od 1 do n, tedy $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Úloha 2.6. Kouma s Ňoumou si vybírali čísla. K dispozici měli sadu čísel $1, 2, \ldots, n$ každé právě jednou. Kolika způsoby si Kouma a Ňouma mohli čísla vybrat, pokud si každé číslo mohl vybrat jen jeden z nich, ale ne všechna čísla musela být vybrána?

Úloha 2.7. Matěj se rozhodl nějaký zajímavý problém nebo rébus najít v rodinné knihovně. Při prohlížení knih z jedné z nich vypadl starý papír, na němž byl vyobrazen konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Uvnitř něj byl umístěn bod X. Někdo dále do obrázku vyznačil body K, L, M, N jako těžiště trojúhelníků po řadě ABX, BCX, CDX, DAX. Pokud víme, že obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je 1, jaký je obsah čtyřúhelníku $KLMN$?

Bonusová úloha. Matějovi nalezený papír nestačil a hledal dál. Hledal opravdu svědomitě, až narazil na knihu s titulem Důkaz $0 = 1$. Kniha se mu zdála podezřelá a jako z říše sci-fi. Když ji otevřel, všechny stránky byly začerněné, až na úplně poslední s razítkem „Cenzurováno ministerstvem matematiky“. Pokuste se zrekonstruovat část knihy a dokažte, že $0 = 1$.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ