Zadání 6. série

OBDÉLNÍKY

Termín odeslání: 4.5.2015

autor: *Stopa*

Úloha 6.1. Matěj chystal jmenovky na velkou oslavu, která měla být toho dne odpoledne. Měl na to připravený velký obdélníkový kus barevného papíru o stranách 1 a 2. Jmenovka byla obdélník libovolné velikosti se stranami v poměru 1:2. „Já nevím, kolik přijde lidí," postěžoval si Matěj Liběnce. „Ale to přece nevadí, budeš tu ty, já, Henry, Bubla, Kouma a Ňouma, a tak umíme vyrobit přesný počet jmenovek, ať už přijde kdokoliv další." Ukažte, že obdélník o stranách 1 a 2 lze rozdělit na n (ne nutně shodných) obdélníků s poměrem stran 1:2, pokud $n \geq 6$.

Úloha 6.2. Henry se na oslavě samozřejmě jako vždy chtěl pořádně vytáhnout a ukázal všem svůj obdélník $ABCD$ s bodem P uvnitř. „Podívejte se!" volal na všechny přítomné, „platí, že $|\sphericalangle APD|+|\sphericalangle BPC| = 180°$!" Liběnka počkala, než ustalo pozdvižení, které takové tvrzení v sále vyvolalo a pak se otočila na Henryho: „Ale pokud platí to, co říkáš, kolik pak je $|\sphericalangle PAD| + |\sphericalangle PCB|$?"

Úloha 6.3. Bubla se nenechala Henryho obdélníkem vyvést z míry a hned se také předvedla: „To já mám obdélníků hned nekonečně mnoho! A to není všechno. Všechny je mám umístěné v kartézském souřadnicovém systému a všechny mají strany rovnoběžné s osami, jeden vrchol v bodě $[0,0]$ a protější vrchol v bodě $[p,q]$, kde p a q jsou nějaká nenulová celá čísla." (Bubliny obdélníky mají vrcholy s celočíselnými souřadnicemi, ale ne každý bod s celočíselnými souřadnicemi musí být vrcholem nějakého bublina obdélníku.) Tentokrát to byl Matěj, kdo promluvil do hlasitého šumu obecenstva: „Ale to znamená, že některý z tvých obdélníků je celý překrytý nějakým jiným! To je přece skandální!" Dokažte Matějovo tvrzení.

Úloha 6.4. „Vy a ty vaše obdélníky," uchechtl se Kouma. „To já jsem si donesl pravidelný $4n$-úhelník o straně 1, podívejte se, jak–" Nedokončil však větu, protože si všiml, že Ňouma vedle něj má v ruce nůžky a stříhá jeho $4n$-úhelník na rovnoběžníky. Kouma jen zíral s otevřenou pusou, ale Ňouma dokončil stříhání a z konečně mnoha rovnoběžníků, které nastříhal (nic dalšího mu z $4n$-úhelníku nezbylo), začal vybírat ty, které byly zároveň obdélníky. Až je všechny povybíral, sečetl jejich obsah a vykřikl jej do placu. Jaké číslo mohl Ňouma zvolat?

Úloha 6.5. Po Ňoumově výstupu měli všichni plné zuby obdélníků. Raději si označili ciferný součet přirozeného čísla n jako $C(n)$ a pak se snažili najít takové číslo, že $n + C(n) + C(C(n)) = 2015$. Najděte také všechna taková přirozená čísla.

Úloha 6.6. A nebyla by to Bubla, kdy si zase nepřisadila: „Pche, rovnice... Já jich mám hned pět! Cílem je najít všechna reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, která jsou řešením systému následujících rovnic:“

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= x_3^2 \\
x_2 + x_3 &= x_4^2 \\
x_3 + x_4 &= x_5^2 \\
x_4 + x_5 &= x_1^2 \\
x_5 + x_1 &= x_2^2
\end{aligned}
$$

Úloha 6.7. Na závěr celé oslavy proběhla večeře v restauraci. Všech $2n$ lidí se vešlo k jednomu kulatému stolu. Každý si objednal něco jiného, ale číšník byl popleta, nezapamatoval si, kdo co chtěl, a rozdal jim tak jídla náhodně. Henry ale situaci zachránil, když ostatní přesvědčil, že ať už to číšník rozdal jakkoliv, lze stůl otočit tak, aby alespoň dva lidé měli večeři, kterou si objednali. Dokažte, že má Henry pravdu.

Bonusová úloha. Po večeři začalo být čím dál víc veselo. Dokonce došlo i na recitační soutěž. Každý měl za úkol odrecitovat důkaz své oblíbené matematické věty ve veršované podobě. Váš úkol je podobný. Recitace budete ušetřeni, ale pro splnění této úlohy vás veršování nemine!

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
milujeme vědu
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ