Zadání 4. série

Alespoň

Termín odeslání: 23.2.2015

autor: *Janča*

Úloha 4.1. Liběnka měla tabulku 10×10 vyplněnou čísly 1 až 100. Když ji ale ukázala Henrymu, ten jenom poznamenal: „Ale vždyť v tomhle sloupečku máš čísla, jejichž rozdíl je obrovský!“ „To není fér,“ ohradila se Liběnka. „Ať už bych si tabulku vyplnila jakkoliv, bude v ní řádek nebo sloupeček, ve kterém je rozdíl některých dvou políček alespoň 50.“ Dokažte Liběnčino tvrzení.

Úloha 4.2. Henry se oproti tomu vychloubal výrazem

$$\frac{b^3+a}{c} \cdot \frac{c^3+b}{a} \cdot \frac{a^3+c}{b}.$$

Tvrdil, že ať už do něj dosadí jakákoliv reálná čísla $a, b, c \geq 2$, vždy dostane alespoň S. Najděte největší reálné S takové, že pro libovolná $a, b, c \geq 2$ bude Henryho výraz nabývat hodnoty alespoň S.

Úloha 4.3. Kouma dostal k narozeninám 128 dárků. „Podívej Ňoumo,“ rozzářil se Kouma. „Tenhle azurový je nejtěžší, ten broskvové barvy je druhý nejtěžší a třetí je tady ten citronově žlutý.“ „Nevěřím ti,“ zamračil se Ňouma, „beztak na to nemáš odhad.“ Na kolik nejméně vážení (pomocí rovnoramenných vah) dokáže Ňouma Koumovo tvrzení potvrdit, pokud může porovnat vždy jen dva dárky mezi sebou a každé dva dárky mají různou hmotnost?

Úloha 4.4. Matěj napsal na tabuli nekonečně dlouhou posloupnost přirozených čísel tak, že začal číslem a a každé další číslo bylo o k větší než číslo předcházející (a, k jsou přirozená). Kouma si všiml, že tato aritmetická posloupnost má jedenáct po sobě jdoucích členů, z nichž každý je prvočíslo. Ukažte, že k musí být alespoň 2014.

Úloha 4.5. Uvnitř obdélníkového náměstí $ABCD$ v Lenošíně postavili stožár P a vedli z něj ozdobné řetězy do všech čtyř rohů náměstí. Kolemjdoucí Bubla si pak všimla, že platí $|AP|^2 + |CP|^2 = |BP|^2 + |DP|^2$. Zvládnete tuto skutečnost dokázat?

Úloha 4.6. Matěj s Liběnkou přišli Koumovi na narozeninovou oslavu. Kolem stolu bylo celkem 30 míst uspořádaných do kruhu. „Když se teď všichni zvedneme a znovu si sedneme náhodně,“ uvítal je Henry, bude pravděpodobnost, že nenajdete dvě volná místa vedle sebe, menší než 25%. Kolik nejméně bylo u stolu volných míst?

Úloha 4.7. Matěj špatně spal. Zaprvé ho po oslavě ohromně bolela hlava, zadruhé přemýšlel, jak by asi vypadala funkce definovaná na kladných racionálních číslech $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, která by splňovala pro každé kladné racionální x, že $f(f(x)) = \frac{1}{x}$. Najděte alespoň jeden příklad takové funkce.

BRKOS Team 2014

Bonusová úloha. Kouma s Ňoumou hráli Kabrňáky. Ňoumovi už zbývalo dokázat poslední větu, když v tom Kouma zahrál kartu, na které stálo „Kouma vyhrál a Ňouma je ňouma.“ „Tuhle kartu jsi právě nakreslil!“ obvinil ho Ňouma. Koumova vlastní karta nebyla moc dobrá. Vymyslete si vlastní kartu Kabrňáků a pošlete nám svůj návrh (včetně grafického zpracování).

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ