Zadání 3. série

Kroky

Termín odeslání: 19.1.2015

autor: *Janča*

Úloha 3.1. Matěj si přivezl z Matematické konference příklad, který ovšem nikdo neuměl dokázat. Ukázal ho přátelům po nedělním obědě. „Máme libovolná celá čísla a, b, c, d, e. V každém kroku tato čísla nahradíme čísly $|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-e|, |e-a|$. Nedaří se mi ovšem dokázat, že po určitém konečném počtu kroků bude alespoň jedno z čísel 0. Pomůžete mi s důkazem?“

Úloha 3.2. „Moc dobře víš, Matěji, že mi takovéto úlohy zrovna třikrát nejdou,“ mračil se Henry. „Ale když už jsem zmínil tu trojku, dám Vám taky jeden příklad. Máme posloupnost trojic $a_1 = (3, 13, 31)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $a_{n+1} = (x_n y_n, y_n z_n, x_n z_n)$, kde $a_n = (x_n, y_n, z_n)$. Tvrdím, že v žádné trojici se nevyskytuje mocnina přirozeného čísla. Komu se to podaří dokázat, za toho budu celý týden umývat nádobí.“ Umyje Henry nádobí i za Tebe?

Úloha 3.3. Kouma se přihlásil do turnaje v Kamenohraní. Je to starodávná hra, hraná na šachovnici 5×5. Začíná se s 13 černými kameny a s 12 bílými, přičemž černé kameny jsou rozestavěny na černých polích a bílé na bílých. První hráč vybere černý kámen a odstraní ho z hracího plánu. Na uvolněné políčko potom posune bezprostředně sousedící bílý kámen (pohybovat se smí pouze o jedna ve svislém nebo vodorovném směru). Druhý hráč na uvolněné políčko posune černý kámen a první hráč opět na vzniklé volné pole posune kámen bílý. Ten, kdo nemůže táhnout, prohrává. Kouma se do této situace nechce dostat, ovšem nedaří se mu vymyslet výherní strategii. Pomůžeš mu zvítězit v turnaji a vymyslíš strategii za jednoho ze dvou hráčů, která vždy vyhrává, ať už druhý hráč hraje jakkoliv?

Úloha 3.4. Liběnka miluje moderní umění, podařilo se jí přemluvit Ňoumu, aby společně zašli na výstavu. I když Ňouma umění nerozumí, zaujal ho jeden z obrazů: „Liběnko, vybavuješ si obraz s bublinami vystupujícími na obzor? Něčeho jsem si na něm všimnul. Obzor byl na plátně reprezentován přímkou p, které se dotýkaly dvě bubliny, tedy vlastně kružnice, o jednotkovém poloměru. Nebyly to tak obyčejné bubliny, kromě přímky se totiž dotýkaly i jedna druhé. Můžeme si je označit jako k_0 a k_1. Po chvíli pozorování jsem si uvědomil, že každá další bublina k_n je namalována tak, že se zároveň dotýká bublin k_{n-1}, k_{n-2} i přímky p.“ „To zní velice zajímavě, jen si to neumím moc dobře představit,“ zastyděla se Liběnka. „Počkej, to není všechno, umím také spočítat vzdálenost bodů dotyku s přímkou p dvou po sobě následujících bublin, doma ti to všechno řádně ukážu.“ Jelikož Ňouma po náročném dni ihned usnul, nestihl Liběnce pozorování z obrazárny předvést. Zkus to za něj a spočítej vzdálenost Ňoumou popsaných bodů.

BRKOS Team 2014

Úloha 3.5. Liběnka objevila v knihovně antickou knihu. Náhodně ji otevřela na stránce, která popisovala Platónská tělesa. Zaujal ji pravidelný dvacetistěn. Zapamatovala si, že má dvanáct vrcholů a jeho dvacet stěn tvoří rovnostranné trojúhelníky. Při večeři ji napadl příklad, se kterým se pochlubila Matějovi. „Co kdybych na každou stěnu pravidelného dvacetistěnu napsala nezáporná celá čísla tak, aby součet čísel na všech stěnách byl 39? Myslíš, že by potom musely existovat dvě stěny se společným vrcholem, na kterých by bylo napsané stejné číslo?“ Jelikož v televizi dávali samé pro Matěje nezajímavé pořady, zjistil, že takové dvě stěny určitě existují, ještě než šel spát. Nenech se Matějem zahanbit a dokaž to také.

Úloha 3.6. Henry s Bublou rádi tančí, proto chodí každý pátek do nočních klubů v Hloupětíně. Za ta léta vypozorovali následující: V Hloupětíně bydlí n hlupáků a n hlupaček. Každý noční klub v Hloupětíně má mezi svými členy stejný počet hlupáků jako hlupaček. Žádné dva kluby nemají všechny členy stejné a každé dva kluby mají stejně společných členů–hlupáků jako společných členů–hlupaček. Určíš z jejich pozorování, kolik nejvýše je v Hloupětíně nočních klubů? Přilož i příklad s právě tolika kluby.

Úloha 3.7. V Brkosích novinách, v sekci Matematické rébusy, se objevila zajímavá soutěžní otázka. „Dnes hrajeme o čtyři Brkosí body a spoustu Kabrňáků! Ptáme se Vás, jak dokázat pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, splňující $a + b + c = 3$, nerovnost $\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$.“

Bonusová úloha. Byl hezký, lednový den a Bubla s Ňoumou si hráli venku, když vtom začalo sněžit. Bubla sníh milovala, a tak začala vločky chytat do dlaní. Když si je prohlížela, všimla si něčeho zajímavého. Když potom svůj objev představila Ňoumovi, Ňouma se zamyslel a řekl: „Něčeho podobného si všimnul již v roce 1906 pan Koch.“ „Kdopak to byl?“ vyptávala se Bubla. „To byl švédský matematik, zkonstruoval tzv. Kochovu vločku, jednu z prvních fraktálních křivek.“ Bubla se zarděla a dále chytala vločky, neznala totiž pojem Kochova vločka a ani netušila, co je to fraktál. Vysvětlíš jí tyto pojmy? Potom si vytvoř nějakou svoji fraktální sněhovou vločku a napiš Buble, jak si ji může vytvořit i ona.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ