Zadání 2. série

Tabulky

Termín odeslání: 8.12.2014

autor: *Ted a Vláďa*

Úloha 2.1. Matěj se chlubil Liběnce svou novou interaktivní šachovnicí: „Je to klasicky obarvená šachovnice 5×5 s bílými rohy a umí v každém kroku invertovat celé řádky nebo sloupce!“ Liběnka zalapala po dechu. „To znamená, že si můžeš vybrat kterýkoliv řádek či sloupec a všechna políčka v něm přebarvit na opačnou barvu?“ zeptala se opatrně. „Přesně tak. A dokonce umím tímto způsobem celou šachovnici obarvit na černo,“ chlubil se dál Matěj. „Pff, to umí každý,“ nenechala se oklamat Liběnka. „Ale na kolik nejméně kroků to dokážeš? A kolik nejméně kroků potřebuješ, abys šachovnici obarvil na bílo?“ Najděte odpověď na Liběnčiny otázky a **řádně ji zdůvodněte**.

Úloha 2.2. Henry vstoupil do místnosti, odhodil několik popsaných papírů na stůl a zabouchl za sebou dveře se slovy „Dobrou noc!“ Matějovi s Liběnkou to nedalo a začali zkoumat Henryho papíry. Bylo na nich mnoho tabulek o rozměrech 4×7, jejichž políčka byla obarvena červeně nebo modře. „To je zajímavé,“ začala Liběnka, „ve všech tabulkách existují alespoň dva obdélníky s vrcholy ve středech políček jedné barvy.“ „A myslíš, že to platí vždy?“ zeptal se Matěj. Rozhodněte, zda pro každou tabulku 4×7, jejíž políčka jsou obarvena dvěma barvami, **existují dva obdélníky** s vrcholy ve středech políček jedné barvy. Čtverec také považujeme za obdélník.

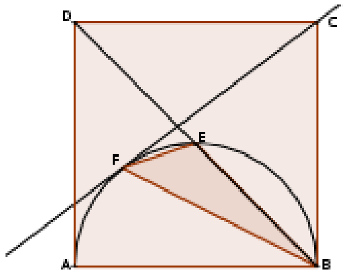
Úloha 2.3. Henry té noci nemohl usnout. Neustále totiž přemýšlel, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje tabulka $n \times n$ obsahující n^2 přirozených čísel, pro kterou platí, že v políčku v i-tém řádku a j-tém sloupci je počet všech čísel j, která se vyskytují v i-tém sloupci. (Např. je-li ve třetím řádku a druhém sloupci zapsána čtyřka, znamená to, že ve třetím sloupci tabulky se vyskytují celkem čtyři dvojky.) Najděte všechna taková n.

Úloha 2.4. Ňouma sledoval kouzelnický šachový turnaj. Byla to docela řežba, přesně jak to měl v kouzelnických šachách rád – hrálo se totiž na nekonečné šachovnici. Na začátku bylo na šachovnici postaveno n^2 živých figurek rozestavených do políček ve tvaru čtverce o straně n políček tak, že v každém políčku stála právě jedna figurka. V každém tahu jedna z figurek vertikálně či horizontálně přeskočila sousední políčko obsazené jinou figurkou, postavila se na prázdné pole přímo za toto políčko, bez milosti rozsekala přeskočenou figurku a nechala zbytky vítězoslavně odklidit z hracího pole. Ňoumu tentokrát napadlo, že by mohl najít všechna přirozená čísla n, pro která může tato hra skončit s jedinou vítěznou figurkou na šachovnici.

Úloha 2.5. V Hloupětíně se na náměstí konaly trhy. Jeden z prodavačů prodával dvojice přirozených čísel, jejichž součet byl 2014, ale při jejichž sčítání v desítkové soustavě nedocházelo k žádnému přenosu. Určete počet všech dvojic, které mohl prodavač nabízet.

BRKOS Team 2014

Úloha 2.6. Liběnka s Matějem navštívili hloupětínskou galerii. Zrovna se totiž konala výstava moderního umění. Když procházeli galerií, jeden z obrazů Liběnku velice zaujal. Čtvercový obraz $ABCD$ měl nad spodní hranou vyobrazen půlkružnici. Obraz rovněž přetínala přímka z vrchního levého rohu D do spodního pravého rohu B. Když přišel k obrazu i Matěj, řekl Liběnce: „Kdybys k této půlkružnici vedla z bodu C tečnu, která nebude splývat s rámem obrazu, označila její bod doteku jako F a navíc označila průsečík přímky BD s polokružnicí jako E, jaký by byl obsah trojúhelníku BEF?“



Úloha 2.7. Kouma přišel za Ňoumou s prosbou o pomoc. „Sedím nad tím už dva dny a ne a ne to rozlousknout!“ zabědoval Kouma. „Ukaž, půjč mi to,“ vytrhl Ňouma papír Koumovi z ruky. „Hele, už to skoro mám!“ zakřičel euforicky. Budete rychlejší než Ňouma a zjistíte všechna reálná řešení systému následujících nerovnic?

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0
\end{aligned}$$

Bonusová úloha. Na procházce Bublu napadla otázka, které že to číslo je pro ni nejkrásnější. Dumala a dumala, nic kloudného ji nenapadalo, a tak běžela za Liběnkou, co ona na to. Liběnka opáčila, že ona samozřejmě ví, které číslo je pro ni to nejlepší, a že k úžasnosti svého čísla má dokonce nejméně tři důvody. A co vy? Jaké je vaše nejoblíbenější číslo? Abyste se nezahanbili před Liběnkou, napište i ony tři důvody, proč je vaše číslo lepší, než kterékoli jiné. Třeba ji trumfnete ☺.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · milujeme vědu
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ