Zadání 6. série

NEKONEČNÁ SÉRIE

Termín odeslání: 5.5.2014

autor: *Baci a Shymo*

Úloha 6.1. Každé přirozené číslo je obarveno jednou ze čtyř barev tak, že žádná dvě sousední čísla nemají stejnou barvu. Matěj má za úkol vybrat si jednu z těchto barev a nekonečně mnoho čísel přebarvit touto jednou barvou (tj. změnit jejich barvu na Matějem vybranou) tak, aby opět žádná dvě sousední neměla stejnou barvu. Je to možné pro každé obarvení?

Úloha 6.2. Bubla si napsala posloupnost $a_k = \frac{(k+1)^2(k^2+\frac{1}{k})}{(k+2)(k^3-1)}$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ a pak začala členy této posloupnosti násobit. Nejprve první s druhým, pak to vynásobila třetím, čtvrtým atd. K jakému číslu se Bubla dostane, vydrží-li násobit až do nekonečna?

Úloha 6.3. Matěj Buble její posloupnost záviděl, a tak si hned začal psát jednu vlastní na svou tabuli. Nejprve napsal na tabuli číslo jedna. Za něj dvojku, pak trojku, a pak vždy součin všech doposud napsaných čísel zvětšený o jedničku. Liběnka to sledovala a průběžně sčítala převrácené hodnoty Matějových čísel. Najděte nejmenší číslo, které Liběnčin součet nemohl nikdy překročit. (Převrácená hodnota čísla x je číslo $1/x$.)

Úloha 6.4. Henry je však všechny překonal, když si začal psát obecnou posloupnost danou vztahem $a_{n+1} = (a_n^2 + a_{n-1}^2 + 4)/(a_n + a_{n-1} + 2)$ s jedinou podmínkou: Její členy musí být kladné. Po chvilce se členy posloupnosti začaly blížit jedné konkrétní hodnotě. Vaším úkolem je tuto hodnotu určit (tedy určit limitu této posloupnosti).

Úloha 6.5. Ňoumův snídaňový hrníček na kakao měl jedno ucho a na sobě namalovaných pět červených teček. Zatímco Ňouma poklidně snídal, Kouma přemítal, jestli je možné každou tečku spojit s každou jinou **po povrchu hrníčku** tak, aby se spojnice na hrníčku neprotínaly. Je to možné?

Úloha 6.6. Nový Hloupětínský park měl tvar čtverce $ABCD$. Byly z něj čtyři východy a to ve vrcholu D, v bodě E nacházejícím se na hraně AB tak, že $|\boldsymbol{AE}| > |\boldsymbol{BE}|$, dále v bodě F, jenž je středem CD. Poslední východ byl v bodě G, který ležel na hraně BC tak, že FG bylo rovnoběžné s DE. Ukažte, že přímka EG se dotýká kružnice vepsané do čtverce.

Úloha 6.7. Kouma dal Ňoumovi k svátku tabulku oříškové čokolády, která měla $2 \times n$ dílků ve dvou řádcích po n dílcích. Počty oříšků v jednotlivých dílcích byla čísla $1, 2, \ldots, 2n$. Navíc platilo, že v každém sloupečku je stejně oříšků a totéž platilo pro řádky. Určete všechny možné velikosti Ňoumovy čokolády?

BRKOS Team 2014

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

`http://brkos.math.muni.cz/`