Zadání 4. série

# STEREOMETRIE

Termín odeslání: 31.3.2014

autor: *Stopa*

**Úloha 4.1.** Bubla dostala k svátku konvexní těleso. Když se na něj podívala seshora, viděla kruh, když zepředu, uviděla čtverec, a když zboku, mělo těleso tvar rovnoramenného trojúhelníku. (Tedy kolmé rovnoběžné promítání ze tří navzájem kolmých směrů.) Jak mohlo takové těleso vypadat? Těleso vhodným způsobem popište, případně také načrtněte.

**Úloha 4.2.** Matěj má kostku o hraně 2 a chtěl by ji polepit samolepkami ve tvaru T-tetromina tvořeného 4 čtverci o straně 1. Podaří se Matějovi kostku polepit celou, aniž by se samolepky překrývaly?

**Úloha 4.3.** Henry měl tři různě velké kružnice $k$, $l$, $m$ a žádné dvě se mu neprotínaly. Přišel Matěj a průsečík vnějších tečen $l$ a $m$ označil $A$. Pak Liběnka označila průsečík vnitřních tečen $m$ a $k$ jako $B$. Nakonec Bubla označila průsečík vnitřních tečen $k$ a $l$ jako $C$. Henry se najednou zaradoval, protože body $A$, $B$ a $C$ ležely na přímce. Uměli byste tuto skutečnost dokázat?

**Úloha 4.4.** Liběnka si do prostoru narýsovala čtyřstěn ABCD a z každého vrcholu si spustila kolmici na protější stěnu. Byla zklamaná, že se jí žádné dvě její prostorové výšky neprotínají, ale to už přišel Matěj a hned ji utěšil. Prozradil jí totiž, že příčka libovolných dvou takových výšek procházející vrcholem čtyřstěnu neležícím na žádné z nich prochází zároveň také zbylými dvěma výškami. Dokažte toto tvrzení.

---

**Úloha 4.5.** Do Hloupětína přišla každoroční várka čtyř Lenošínských **kladná** reálných čísel. Hloupětínští zjistili, že pro každá dvě z nich platí, že jejich součin nepřesahuje jejich součet. Už se jim ale nepovedlo ukázat, že součin všech čtyř nepřesahuje dvojnásobek jejich součtu. Dokážete to vy?

**Úloha 4.6.** Kouma se vychloubal Ňoumovi, že jeho funkce $f(x)$ lze **jednoznačně** zapsat jako součet dvou funkcí $s(x)$ a $l(x)$, kde $s(x)$ je sudá (pro každé $x$ je $s(x) = s(-x)$) a $l(x)$ je lichá (pro každé $x$ je $l(x) = -l(-x)$). Ňouma se mu ale vysmál: „Vždyť to přece platí pro každou funkci definovanou na symetrickém definičním oboru (pokud $x$ je v definičním oboru, pak i $-x$ v něm je)!“ Uměli byste tuto skutečnost dokázat?

**Úloha 4.7.** Hloupětínští se se zásilkou do Lenošína snažili více. Nejprve vybrali libovolná přirozená čísla $n$ a $k \le n$. Pak vybrali taková přirozená čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ splňující

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

že číslo

$$A = x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{x_k}}}}$$

bylo maximální. Nakonec poslali číslo $A$. Vaším úkolem je toto číslo určit.

**Svá řešení posílejte na adresu:**

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

**nebo uploadujte na našich stránkách:**

http://brkos.math.muni.cz/