Zadání 4. série

Počítání v celých číslech

Termín odeslání: 24.2.2014

autor: *Janča a Vláďa*

Úloha 4.1. Zatímco Bubla lovila vánočního kapra, dumala nad tím, proč skoro nikdy není postavou prvního příkladu. Napadlo ji, že kdyby našla všechna prvočísla p, q, která splňují $p^q + pq = 323$, pomohlo by jí to získat respekt v očích ostatních postav. Pomozte jí!

Úloha 4.2. Liběnka zrovna balila prvočíselné dárky pro ostatní, když za ní přiběhl Matěj a pokřikoval: „Koukej, Liběnko, pokud p a $p^2 + 8$ jsou prvočísla, pak $p^3 + 4$ a $p^4 + 2$ musí být také!“. Liběnka Matějovi vůbec nevěřila, ale Matěj jí ukázal bezchybný důkaz svého tvrzení. Dokázali byste to také?

Úloha 4.3. Bubla se mezitím venku koulovala s Henrym. Jednou sněhovou koulí zasáhla Henryho opravdu tvrdě do nosu. Henry se chvíli rozkoukával a pak si všiml, že je ta koule vyztužená papírem. Už se chtěl ohradit, že to není fér, když si všiml, že je na papíru napsána rovnice

$$(2a - b)^2 \left(1 + 4b^2 + 3a(3a - 4b)\right) = 2\left(2a(2b - 3a + 1) - b(2b - 3a) - b - 1\right)$$

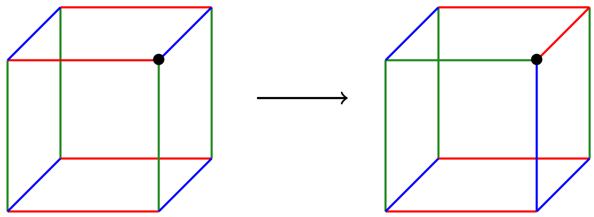
pro celá čísla a, b. Než se Bubla přišla omluvit, už ji měl skoro vyřešenou. Zvládnete to dříve než on?

Úloha 4.4. Hloupětínští si na náměstí tesali ledové sochy známých matematiků. Avšak v noci, když už všichni spali, někdo do sochy Diofanta vytesal rovnici $(2x)^{3x} + 4 = 7y$. Hloupětínští se rozhodli, že nebudou hledat viníka, nýbrž se tuto rovnici pokusí vyřešit, a to pěkně v celých číslech. Vůbec se jim to nedařilo, a tak se obrátili na Lenošín. Ovšem nikomu z Lenošína se nechtělo sousedům pomoci. Dokážete zachránit Hloupětín před potupou a vyřešit tuto rovnici v celých číslech?

Úloha 4.5. Matěj ve sněhu vyšlapal trojúhelník ABC a také body A', B', C', které byly obrazy vrcholů A, B, C v osové souměrnosti postupně podle stran BC, CA a AB. Liběnka ho upozornila: „Matěji, to tě ani trochu nezarazilo, že body A' a B' splývají?“ Matěj se zatvářil rozpačitě. „Ale· pak přece bod C' musí být střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, ne?“ Měl Matěj pravdu?

BRKOS Team 2013

Úloha 4.6. Kouma si hrál s obyčejnou šestistěnnou kostkou. Jednu její hranu obarvil červeně. To se mu však zdálo málo, tak obarvil červeně všechny hrany s ní rovnoběžné. To mu taky nestačilo, tak si vybral nějakou neobarvenou hranu a obarvil ji i všechny hrany s ní rovnoběžné na zeleno. Zbytek neobarvených hran nakonec obarvil na modro. Pak si kostku půjčil Ňouma a začal přebarvovat hrany tak, že si vždy vybral jeden vrchol a hrany přebarvil „do kruhu“, tedy pro tři hrany vycházející z tohoto vrcholu přebarvil první na barvu druhé hrany, druhou na barvu třetí hrany a třetí na barvu první hrany. Koumovi se to líbilo a začal přemýšlet nad tím, jestli takhle dokáže přebarvit celou kostku tak, aby jedna stěna měla všechny hrany červené a protilehlá stěna měla všechny hrany modré. Může se to Koumovi podařit?



Úloha 4.7. Henry se rozhodl ozdobit vánoční stromeček koulemi o 100 různých barvách. Nakoupil proto spoustu balení (už zapomněl kolik, ale určitě jich bylo alespoň 40425), z nichž každé obsahovalo právě čtyři koule různých barvách a každá měla některou ze 100 daných barev. Navíc platilo, že žádná dvě balení neměla společné více než dvě barvy. Dokažte, že z Henryho balení lze vybrat 49 takových, že dohromady obsahují všech 100 barev, ale libovolných 48 z nich už tuto vlastnost nemá.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`