Zadání 3. série

Grupy

Termín odeslání: 19.1.2014

autor: *Kvágr a Vláďa*

Úloha 3.1. Liběnka zjistila, že má na zahradě čtyři různé druhy semínek jedné cizokrajné květiny, od každého druhu plný pytel. Druhy se jmenovaly velmi zvláštně: *antalis*, *borenas*, *ciruta* a *durum*. To ale Liběnku tolik netrápilo, spíše přemýšlela, co s nimi udělá. Nakonec ji napadlo, že by je mohla zkusit křížit a zjistit, co z nich vyroste. Pracovala velmi usilovně, až zjistila, že když zkříží druh *borenas* se sebou samým, dostane opět druh *borenas*. Tento druh dostala i po zkřížení druhu *antalis* s druhem *ciruta*. Na chvíli se zamyslela, podívala se znovu do pomocného textu a všimla si, že druhy jejích květin s operací křížení tvoří komutativní grupu! Určete, jak mohly dopadnout výsledky křížení ostatních druhů květin a ukažte, že se opravdu jedná o grupu.

Úloha 3.2. Henry se vychloubal dětem, že má skvělou novou grupovou krabičku, do které umí vložit číslo napravo, číslo nalevo a dole mu vypadne číslo, které je výsledkem grupové operace s nimi. Po chvilce však se smutkem přiznal, že každý prvek této grupy je řádu nejvýše dva. „To nevadí,“ utěšovala ho Bubla. „Alespoň máš jistotu, že je ta grupa komutativní!“ Ukažte, že Bubla měla pravdu.

Úloha 3.3. Matěj se ocitl v grupovém teleportovém bludišti skládajícím se z několika místností, každá byla označená jiným symbolem. V každé místnosti byl stejný ovládací panel obsahující symboly všech místností. Po zadání symbolu α a symbolu β by se Matěj teleportoval do místnosti se symbolem $\alpha \otimes \beta$, kde operace $\otimes$ společně s množinou symbolů místností tvoří grupu. Matěj začal v místnosti ε, která byla shodou náhod označena symbolem, jenž byl neutrálním prvkem oné grupy. Aby se v bludišti neztratil, vybral si vždy v neutrální místnosti nějaký symbol, a pak vždy zmáčkl vybraný symbol a symbol místnosti, ve které se nacházel. To opakoval tak dlouho, dokud se neteleportoval zpět do místnosti ε. Po chvilce veselého teleportování zjistil, že počet místností, které projde, než se vrátí zpět do místnosti ε (včetně té, ve které začal), nabývá pro různé symboly všech hodnot $1, 2, \ldots, 2013$. Uveďte příklad struktury, jakou mohlo bludiště mít.

Úloha 3.4. Ňouma si připravil pro Koumu zapeklitý příklad. „Koumo, myslím si konečnou n-prvkovou množinu X. Dokaž, že $(P(X), \div)$ je grupa a urči počet všech jejích podgrup!“ „Hmm, ale co znamenají ty symboly?“ „To je jednoduché, $P(X)$ je množina všech podmnožin množiny X a $\div$ je symetrický rozdíl (pro libovolné množiny A, B je definován vztahem $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$).“ Koumu to ale příliš neuspokojilo. „Vždyť je to hrozně těžké!“ „Možná by se ti k tomu mohla hodit tzv. Bellova čísla“, slitoval se nad ním Ňouma. Pomozte Koumovi splnit jeho úkol.

Úloha 3.5. V Lenošíně se s tradiční podzimní výrobou čísel příliš nenadřou. Proto mají v Hloupětíně poté tolik práce, aby čísla upravili a udělali z nich čísla celá. Nedávno přišel do Hloupětína zlomek $\frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^n}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}$. Najděte alespoň jedno přirozené číslo n, které mohou Hloupětínští použít, aby ze zlomku udělali celé číslo.

Úloha 3.6. Liběnka si zatím trénovala rýsování. Začala tím, že si nakreslila trojúhelník ABC a opsala mu kružnici k. Nové průsečíky kružnice k s osami úhlů BAC, ABC, ACB označila po řadě D, E, F. Matějovi se povedlo dokázat, že přímky DE a CF svírají pravý úhel. Svedete to taky?

Úloha 3.7. Henry zrovna přemýšlel o prapůvodním významu slova množina, když ho napadlo, jak by asi vypadala taková množina přirozených čísel, ze které by nešlo vybrat několik prvků, které by mu v součtu dávaly nějakou pořádnou mocninu. Zajímalo ho, jestli taková množina může být nekonečná a jestli by mu vůbec k něčemu užitečnému mohla být. Pomožte Henrymu! Rozhodněte, zda existuje nekonečná množina přirozených čísel, pro kterou platí, že součet prvků její libovolné neprázdné konečné podmnožiny není tvaru n^k, kde n, k jsou přirozená čísla větší než 1. Můžete se vyjádřit i k užitečnosti takové množiny.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`