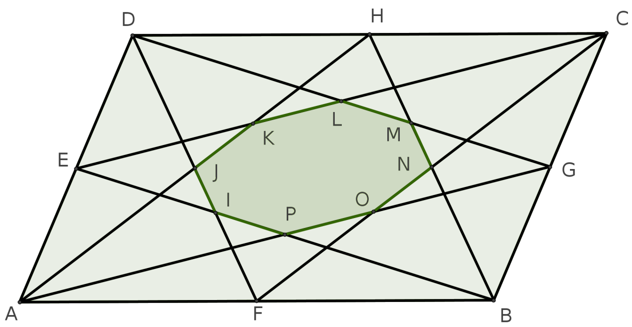
Zadání 2. série

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

<u>Termín odeslání: 1.12.2013</u>

autor: *Áďa a Ted*

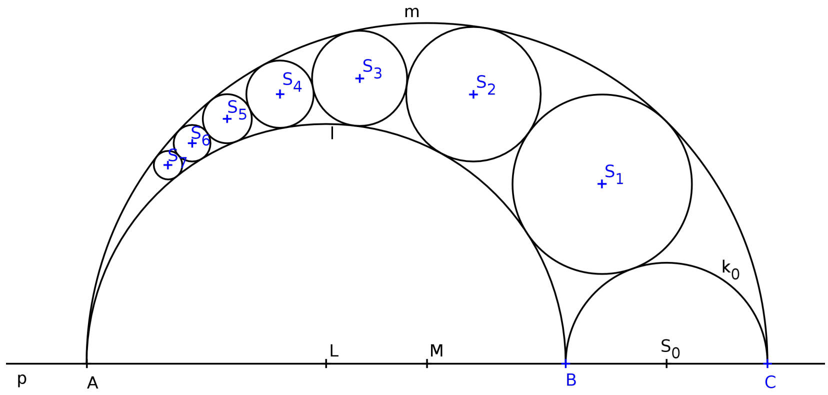
Úloha 2.1. Bubla by si chtěla na Maťejově políčku tvaru rovnoběžníku $ABCD$ zasadit mrkvový lán. Matěj jí vyhověl a vymezil osmiúhelníkový záhon $IJKLMNOP$ tak, že vyměřil body E, F, G, H jako středy stran DA, AB, BC, CD a spojnicemi těchto středů a hraničních bodů protějších stran vymezil nový záhonek. Bubla si také hned spočítala, že bude tento záhon velký natolik, aby pokryl rodinnou spotřebu mrkve. Označme $|AB| = a$, $|BC| = b$ a $|\angle ABC| = \alpha$. Určete obsah mrkvového záhonu v závislosti na parametrech a, b, α.



Úloha 2.2. Mezitím do Matěje hustila Liběnka zadání svojí úlohy. „Máš dvě kružnice k, l se středy S_1, S_2 a poloměry 5 a 2 takové, že vzdálenost jejich středů je 6. Bod A najdeš na polopřímce opačné k polopřímce $\mapsto S_2S_1$ a platí $|AS_2| = 4$.“
Liběnka nechala Matěje, ať si zvolí libovolné přímky p, q procházející bodem A, tak, že každá z těchto dvou přímek protíná sjednocení kružnic $k \cup l$ ve čtyřech bodech. „Označme čtyři průsečíky přímky p se sjednocením $k \cup l$ postupně od bodu A jako $KXYN$ a podobně průsečíky přímky q se sjednocením $k \cup l$ postupně od bodu A jako $WLMZ$. Co mi řekneš o čtyřúhelníku $KLMN$?“ Dokažte podobně jako se to povedlo Matějovi, že je čtyřúhelník $KLMN$ tětivový.

Úloha 2.3. Kouma s Ňoumou zamířili do lesa, kde po sobě dřevorubci nechali spoustu pařezů. Zvlášťe je zaujal jeden divně rostlý. Část jeho okraje vymezovala přímka p. Tvořily ho kružnice m, l, k_0,, které se vzájemně dotýkají a jejichž středy ležely na přímce p jako na obrázku. Místo normálních letokruhů se na něm rýsovala posloupnost kružnic $k_1, k_2, \ldots$ majících vnitřní dotyk s m, vnější dotyk s l a navíc měla pro všechna přirozená n kružnice k_n vnější dotyk s kružnicí k_{n-1}. Ňouma si dobře uvědomil, že jde o opravdu starý strom a hned označil d_n průměr kružnice k_n. Pak prohlásil: „Dokaž Koumo, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je vzdálenost středu S_n kružnice k_n od přímky p rovna $n \cdot d_n$.“ Svedete to také?

BRKOS Team 2013



Úloha 2.4. Aby se Kouma Ňoumovi odvděčil za zajímavou úlohu, sebral tři žetony tvaru šišky a vyskládal je do vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně 1. Ňouma teď smí provádět pouze tahy následujícího charakteru: Zvolí si dva ze tří žetonů a otočí jeden kolem druhého o celočíselný násobek 60°, přičemž žetony se nesmí překrývat. Určete, pro která přirozená $n > 1$ může Ňouma po konečně mnoha tazích tohoto typu uspořádat žetony do vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně n.

Úloha 2.5. Bubla s Liběnkou si na trhu koupily čtyři sáčky gumových medvídků. Bubla zjistila, že dva ze sáčků obsahují kvalitní nefalšované medvídky, z nichž každý má přesně 10 gramů, zbylé dva sáčky však podle ní obsahují falešné 9-ti gramové chudinky. Liběnka má za úkol jedním vážením zjistit, které dva pytlíky obsahují falešné medvídky. Kolik nejméně medvídků musí na přesnou digitální váhu položit, aby to zjistila?

Úloha 2.6. Kouma s Ňoumou šli do lesa na výrazy. Chvíli se procházeli a tu našel Kouma jeden moc pěkný. Ňouma zajásal: „Koukej na tu žížalu, co tu sedí - ta nám moc pomůže!“ „Hmm, ale pořád je to málo,“ odvětil smutně Kouma. O chvíli později však Kouma našel další výraz - byl v díře mezi kořeny spolu s 14 žížalami. Ňouma se pak rozzářil, když opodál uviděl na pěšině třetí výraz. „Tak tohle už by mohlo stačit,“ zavlnil Kouma dlaněmi. A tak je šli domů vyřešit. Řešte v $\mathbb{R}$ soutavu rovnic:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} &= 1\\
\frac{x_2x_3}{x_1}+\frac{x_3x_1}{x_2}+\frac{x_1x_2}{x_3} &= 14\\
\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3} &= \frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

Úloha 2.7. Henry dostal od dětí dva trojúhelníky ABC, XYZ se stejným obsahem. Postupně je lepí do roviny všemi možnými způsoby. Ukažte, že existuje umístění těchto dvou trojúhelníků v rovině takové, že existuje přímka p, pro niž má každá přímka s ní rovnoběžná s oběma trojúhelníky průnik stejné délky.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

BRKOS Team 2013