Zadání 1. série

Dirichletův princip

Termín odeslání: 21.10.2013

autor: *Stopa a Vláďa*

Úloha 1.1. Henry si vyjel společně s Matějem, Liběnkou a Bublou na výlet pod stan. Jedno deštivé odpoledne společně hráli pexeso, které mělo dohromady 32 dvojic. Aby to bylo spravedlivé, rozhodli se, že po úspěšném sebrání dvojice hráč netáhne znovu. Navíc si všichni pamatují, které dvojice již byly společně otočené, takže jedna dvojice kartiček nemůže být otočena podruhé. Když už hráli opravdu dlouho, Matěj to nevydržel a prohlásil: „Už jsme odehráli 2013 tahů. Někdo z nás přeci musí mít už nejméně čtvrtinu všech dvojic!“ Bylo to skutečně tak? Své tvrzení nezapomeňte řádně odůvodnit.

Úloha 1.2. Jakmile se udělalo hezky, vyšli naši přátelé na procházku. Dorazili až na vrchol blízkého kopce, kde byla krásná vyhlídka do okolí. Pod nimi se rozprostíralo mnoho malých políček – dohromady tvořili mřížku o rozměrech 2013×2013. Když nahoru dorazila i Liběnka, ihned zvolala: „Podívejte, na těch políčkách pobíhají poníci!“

„Z téhle výšky vypadají docela jako šachové figurky,“ odpověděl pohotově Henry. „Zajímalo by mne, kolik by se do té šachovnice pod námi vešlo koní, tak aby se žádní dva vzájemně neohrožovali.“ Pomozte Henrymu najít odpověď na tuto otázku.

Úloha 1.3. Mezitím si Matěj s Bublou hráli u mraveniště. Očíslovali si jednotlivé mravence čísly od 1 do 2013 a pak se předháněli, kdo nasbírá víc mravenců tak, aby se čísla žádných dvou nelišila o 4 nebo o 7. Po chvilce Matěj prohlásil, že jich nasbíral nejvíce, co vůbec jde a Bubla po chvilce musela přiznat, že má Matěj pravdu. Kolik nasbíral Matěj mravenců?

Úloha 1.4. Kouma a Ňouma trávili své prázdniny také v přírodě. Na cestách společně hráli různé matematické hry. Jednou hráli hru, při které si Kouma vždy vymyslel celkem 125 navzájem různých přirozených čísel nepřesahujících 2013 a Ňouma si poté na papír zapisoval všechny možné rozdíly některých dvou z nich. Po několika hrách zjistili, že ať už si Kouma zvolí čísla jakkoliv, vždy Ňouma nakonec napíše některý rozdíl alespoň pětkrát. Zvládli byste to dokázat?

Úloha 1.5. Když se naši výletníci ráno vzbudili, na nedalekém poli objevili obrazec v obilí ve tvaru mnohoúhelníku. Přestože se zjistilo, že to byl jen vtípek místních táborníků, obrazec byl natolik působivý, že na něj Bubla chtěla mít památku a nakreslila si ho do prázdninového deníku. Když ho chtěla zakreslit, stoupla si pro lepší výhled dovnitř obrazce, ale zjistila, že nevidí žádnou stranu mnohoúhelníku celou. Nakreslete, jak mohl obrazec v obilí vypadat.

BRKOS Team 2013

Úloha 1.6. Když se Kouma a Ňouma vrátili z výletu, rozhodl se Ňouma, že Koumovi ukáže svůj nejnovější vynález. Byla to krabička, do které se na jedné straně vložilo **přirozené** číslo n a na druhé straně vypadlo číslo $(n+4)(n+11)(n+18)...(n+2013)$. Koumu zaujalo, že každé číslo, které z krabičky vypadlo, končilo alespoň **57** nulami. Zvládnete tuto skutečnost dokázat?

Úloha 1.7. V Hloupětíně se o prázdninách konala tradiční přehlídka matematických úloh z celého přilehlého okolí. V Lenošíně byli líní, a tak jediným jejich příspěvkem byla prachobyčejná soustava tří rovnic. Hloupětínští však přesto měli potíže, objevit reálná čísla x, y, z tak, aby platilo

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 + z^4 &= 4z^3 \\ 3z^2 + x^2z^2 &= 2xy^2 \\ y^2 + z^2 &= 2x^2yz. \end{aligned}$$

Najděte všechna řešení této soustavy.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`