Zadání 5. série

Hmotné body

Termín odeslání: 25.3.2013

autor: *Stopa a Vláďa*

Úloha 5.1. Těžko tomu uvěřit, ale opravdu existují i zábavnější věci, než držet stráž. Dokonce není těžké dokázat, že je jich nespočetně mnoho. Proto, prosím, hleďme shovívavě na stráže, které se místo hlídání s povděkem chytí jakékoli matematické úlohy na ukrácení chvíle, i když jim je zadána podezřelou zahalenou postavou. Obzvlášť, když taková úloha zní takto: Je dán trojúhelník ABC, přičemž bod A má hmotnost 1 a bod B má hmotnost 2. Těžiště hmotného systému ABC označme T (přičemž T leží uvnitř ABC). Bodem T vedeme rovnoběžku s AB a její průsečík s AC, resp. BC označíme U, resp. V. Zjistěte všechny možné hmotnosti, které může mít bod C, pokud platí $\frac{|CA|}{|UV|} \cdot \frac{|CB|}{|CU|} \cdot \frac{|TV|}{|CV|} = 3$. Strážce byl dost bystrý chlapík na to, aby úlohu vyřešil, ovšem nikoli dost bystrý na to, aby si všiml, že zahalená postava mezitím nenápadně proklouzla kolem.

Úloha 5.2. Vedro bylo neúnosné. Matěj s Liběnkou se pomalu plahočili pouští, vyprahlí žízní a touhou po geometrickém příkladu. Najednou spatřili oázu, uprostřed níž se vznášel trojúhelník ABC. Na straně AB bod F splňující $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{6}{5}$, na straně BC bod D splňující $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{1}{2}$ a na straně AC bod E splňující $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{4}{5}$. Průsečík přímek DE a CF byl označen jako G. Hned je napadlo, že by pomocí hmotných bodů mohli určit poměry $\frac{|CG|}{|FG|}$ a $\frac{|DG|}{|EG|}$.

Úloha 5.3. Henry se naopak třásl zimou, až tak chladnou hlavu si zachoval. Předpokládal, že ho brzy začnou pronásledovat a že nemá moc času. Potřeboval odněkud vyslat signál pro případ, že by po něm přece jen někdo pátral. Zrovna přemýšlel, jak to udělat, když ho napadl pěkný příklad: V trojúhelníku ABC označme střed strany AB jako M, střed strany BC jako N a body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami AB, resp. AC jako D, resp. **E**. Pomocí hmotných bodů ukažte, že přímky DE, MN a osa vnitřního úhlu u vrcholu C procházejí jedním bodem.

Úloha 5.4. Matěj s Liběnkou byli zcela opojeni. „Kouma s Ňoumou se takhle dobře určitě nemají,“ zakoulel ušima Matěj. „Ticho,“ okřikla ho Liběnka, „objevuje se další zadání!“ A skutečně: oázu zahalil oblak mlhy, a když pominul, levitovaly v jejím středu rovnoběžníky $ABCD$ a $AEFG$ takové, že bod E ležel na přímce AB a byl různý od B, a G ležel na AD a byl různý od D. Průsečík přímek DC a EF byl označen jako H. Vzduch byl naplněn vůní kokosů a šumění palem přímo vybízelo k použití hmotných bodů k dokázání toho, že přímky AH, BF a CG procházejí jedním bodem (označme ho I) a k určení poměru $\frac{|AI|}{|HI|}$ v závislosti na stranách rovnoběžníků.

BRKOS Team 2013

Úloha 5.5. „Na jednu stranu je mi líto, že se náš tajný dopravní prostředek rozlomil a zanechal Matěje s Liběnkou v paralelních částech," přemítal Kouma, „ale na druhou stranu to příběhu prospěje a aspoň jsme se dostali blíž Henrymu." „Signál přicházel z této pevnosti," přikývl Ňouma. Kouma rozrazil bránu a zařval: „Je tady někdo?" „To nebylo příliš diskrétní, Koumo," pokáral ho Ňouma. Narozdíl od tohoto příkladu: Najděte všechny neprázdné množiny A celých čísel splňující:

a) pro všechna přirozená čísla x platí, že právě jedno z čísel x, $-x$ leží v A,

b) pro všechna x, $y \in A$ leží $xy - 1$ v A.

Úloha 5.6. „Mělo nás hned napadnout, že je to jen fata morgána. Na tak pěkné příklady člověk málokdy narazí," poznamenal Matěj. Vtom se v poryvu větru zvedl písek a obklíčila je parta drsně vzhlížejících nomádů. „Jste našimi zajatci," vyštěkl ten, jehož poměr délky plnovousu ku šířce levé kyčle byl roven stříbrnému řezu. „Jediný způsob, jak vás vykoupit, je donést nám všechny polynomy P s celočíselnými koeficienty, které splňují, že pro libovolná dvě celá čísla a, b s nenulovým součtem platí $(a + b) \mid a \cdot P(b) + b \cdot P(a)$." Liběnka rychle začala počítat, aby zjistila, zda v ní má hrknout strachy, či nikoliv.

Úloha 5.7. „Nikdo tu není," povzdechl si Ňouma. „Celé to bylo úplně k ničemu." Kouma však s úsměvem ukázal na zeď. „Takovýto příklad nám tu mohl nechat jedině Henry. Když ho vyřešíme, určitě zjistíme, kde ho najít!" Na zdi bylo nevzhledně naškrábáno: Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c splňující $3b^2 + a(bc - a) = 241$ takových, že systém rovnic $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = b$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} = c$ má pro proměnné x, y, z řešení v reálných číslech.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.
www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GENERACE
TECHNICKÉ A PŘÍRODOVĚDNÉ VZDĚLÁVÁNÍ
ZÁŽITEK
S BONUSEM → KARIÉRY → PRESTIŽE → ZAJIŠTĚNÍ
www.generaceY.cz

BRKOS Team 2013