Zadání 3. série

Posloupnosti

Termín odeslání: 7.1.2013

autor: *Moutes a Stopa*

Úloha 3.1. Kouma posedával ve svém pokoji a snažil se přijít na jednu posloupnost. Neměl ale zrovna svůj den, a tak chvílemi jen tak koukal z okna a doufal, že ho u toho něco napadne. A jak tak koukal, všiml si, že mu přímo před oknem roste opravdu zajímavý strom. Jeho kmen má délku jedna a poté se rozděluje na dvě větve délky $\frac{1}{3}$, které se dělí každá zase na dvě větve třetinové délky, atd. až poslední větvičky mají délku $\frac{1}{3^{2013}}$. Při tomto zjištění okamžitě zapomněl na svůj původní problém a místo toho se snažil zjistit, jaká je celková délka všech větví na stromě včetně kmene. Ulevilo se mu, když zjistil, že je to pro něj hračka. Kolik dohromady měřily všechny větve a kmen Koumova stromu?

Úloha 3.2. A nad čím to Kouma předtím vlastně koumal? Chtěl najít geometrickou posloupnost splňující rekurentní vztah $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a_1 = 1$. Dokázali byste mu poradit?

Úloha 3.3. Zato u Klevrových už se zase slaví. Tentokrát je s narozeninami na řadě Matěj, a tak se Liběnka vytáhla a upekla mu třípatrový čokoládový dort. Na horní patro postavila do kruhu n svíček a nemohla se dočkat, až ho Matěj ochutná. Ale nebyl by to Matěj, kdyby ji nechtěl trochu poškádlit, a tak se rozhodl to trochu pozdržovat. Vždy jednu svíčku vynechal a další sfoukl a takto postupoval, dokud nesfoukl všechny svíčky. Liběnka si aspoň ukrátila tu dlouhou chvíli tím, že si mezitím spočítala, kterou svíčku Matěj sfoukne jako poslední. Která to byla, jestliže se začínalo u první svíčky? (Tedy první sfouknutá svíčka byla druhá.)

Úloha 3.4. Henry pobaveně sledoval, jak je Liběnka nedočkavá, a tak si dával s krájením taky na čas. A jak tak krájel, napadl ho zajímavý příklad a hned se o něj s dětmi podělil: „Děti, na kolik nejvýše částí můžete rozřezat rovnostranný trojúhelník 2013 řezy rovnoběžnými s jeho stranami?“ A víte to vy?

Úloha 3.5. Nebyli bychom u Klevrů, kdyby mezi dárky nebyl i nějaký ten příklad. Matěj měl najít všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x + y) + y = f(x) + 2f(y)$ platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. A co kdyby takový dárek čekal na vás, zvládli byste ho vyřešit?

Úloha 3.6. Dalším dárkem bylo mikádo. Ne že by na Matěje čekal nový sestřih, ale ta hra s tyčinkami. A Liběnka Matěje hned vyzvala na první kolo. Když už se zbavili skoro všech tyčinek a Matějovi bylo jasné, že už to má Liběnka v kapse, nenápadně začal: „Nevidíš v těch zbylých tyčinkách lichoběžník? A uměla bys dokázat tohle?“ Nechť $ABCD$

je lichoběžník se základnami AB a CD. Přímka p je rovnoběžná s přímkou AB a protíná úsečku BC v bodě E a úsečku AD v bodě F. S je střed úsečky CD. Přímka SE protíná přímku AB v bodě X, přímka SF protíná přímku AB v bodě Y. Dokažte, že $|AY| = |BX|$.

Úloha 3.7. Matěj už si spokojeně odpočíval v křesle a projídal se svou narozeninovou bonboniérou, když na jejím dně uviděl poslední překvapení. Byl to zmuchlaný papírek, na kterém stálo: Dokažte, že pro každá **tři kladná reálná čísla** a, b, c, **pro která jsou všechny odmocniny definovány** platí:

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{4-b+a} + \sqrt{9-c+b} + \sqrt{16+c} \leq 10.$$

Zvládli byste to s takhle přecpaným břichem vy?

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.
`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`