Zadání 6. série

VEKTORY

Termín odeslání: 7. května 2012

autor: *Mária a Zbyněk*

Úloha 6.1. Matěj se rozhodl, že si poskládá vlaštovku, ale ne jen tak obyčejnou, ale z papíru, který má tvar obecného konvexního šestiúhelníku. Vrcholy papíru si označil po řadě A, B, C, D, E a F. Než se pustil do samotného skládání, narýsoval si na papír ještě těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA a FAB (označil je po řadě A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 a F_1), kterými pak vedl sklady papíru. Liběnka ho přitom pozorovala a víc než samotné skládání ji zajímalo, proč je každa strana šestiúhelníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (před začátkem skládání) stejně dlouhá jako strana protější a proč jsou navíc tyto strany rovnoběžné.

Úloha 6.2. Henry si řekl, že vlaštovky jsou pro děti a on že si vyrobí pořádný termovač nukleárů. Vzal svářečku a šel do sklepa. Vzal šest rovných trubek a svařil je k sobě konci a to tak, že začátek druhé byl svařen s koncem první v bodě P_1, konec druhé se začátkem třetí v P_2, a tak dál, až konec šesté se začátkem první v P_6. Na první pohled bylo zřejmé, že výsledný útvar není rovinný. Na druhý pohled jste simohli všimnout, že P_1P_2 je rovnoběžné s P_4P_5, P_2P_3 s P_5P_6 a konečně P_3P_4 s P_6P_1. Uměli byste dokázat, že mají úsečky P_1P_4, P_2P_5 a P_3P_6 společný střed?

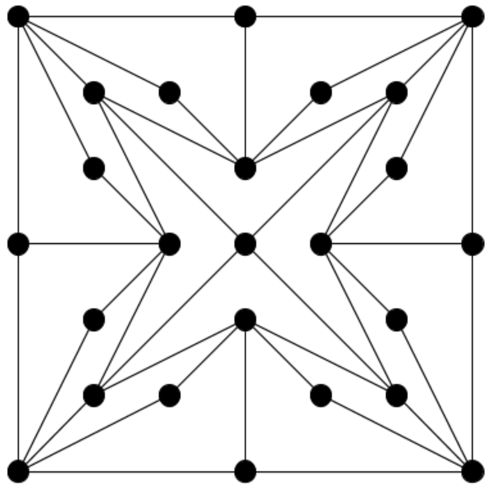
Úloha 6.3. Liběnka nechtěla zůstat pozadu a začala si skládat vlastní vlaštovku. Ona pro změnu použila kruhový papír. Uvnitř papíru si zvolila bod P a přehnula papír dvěma kolmými sklady, vedenými bodem P. První se protnul s okrajem papíru v bodech A a C, druhý v bodech B a D. Liběnka je nyní tuze zvědavá, jaká je množina bodů Q takových, že $APBQ$ je obdélník.

Úloha 6.4. Henry zatím pokračoval ve svém kutilském díle. Další komponentou termovače, kterou si vyrobil, je čtyřstěn, jehož délky protějších hran tvoří dvojice (a, a'), (b, b'), (c, c'). Dokažte, že existuje trojúhelník o stranách $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, který je ostroúhlý.

Úloha 6.5. Hloupětínští se rozhodli, že si postaví lanovku. A ne jednu, postavili si celou síť lanovek. Na obrázku 6.1 jsou zakreslené jejich stanice a mezi nimi jednotlivé linky. Rozhodněte, jestli mohou hloupětínští objet všechny stanice, aniž by nějakou navštívili dvakrát. Jejich trasa může začínat i končit v libovolných stanicích, ale samozřejmě se v průběhu cesty mohou dopravovat pouze lanovkou.

Úloha 6.6. Ňouma s Koumou se rozhodli, že musí lanovku hned vyzkoušet. Celí nedočkaví nasedli do vozu lanovky se sériovým číslem 1367635. Zatímco si Kouma užíval výhled do kraje, Ňouma přemýšlel, zda existuje přirozené b takové, že číslo vozu je zápisem druhé mocniny v soustavě o základu b. Dokázali byste mu pomoci?

Úloha 6.7. „Vaše jízdenky prosím," ozvalo se vedle Ňoumy a ten si uvědomil, že si zapomněl lístek koupit. „Pane revizore, nedalo by se …," začal ze sebe Ňouma nesměle soukat. „Dle osmého paragrafu jízdního řádu," přerušil ho revizor, „může být jízdné odpuštěno právě těm osobám, které zvládnou najít všechna přirozená čísla n taková, že polynom $64x^n + 1$ lze psát jako součin nekonstantních polynomů s celočíselnými koeficienty". Zachráníte Ňoumu před pokutou?



Obr. 6.1: Linky lanovky

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`