Zadání 3. série

Rovnice

Termín odeslání: 9. ledna 2012

autor: *Zdeněk a Píta*

Úloha 3.1. Co letos frčelo za vánoční dárky? U vás jsou to možná teplé ponožky, matematické knížky, dárkové poukazy na zážitky nebo třeba nový mobil, ale v Lenošíně a Hloupětíně vedou jednoznačně hravé a hezké rovnice. Tak například jeden z dárků, co letos Kouma rozbalil bylo:

Najděte všechna reálná čísla splňující:

$$\sin^3(x)\cos(3x) + \cos^3(x)\sin(3x) = \frac{3}{8}.$$

Úloha 3.2. Zato Ňouma dostal rovnici $3x^3 - 3x - 1 = 0$, kterou neuměl vyřešit. Nebyl ale smutný, její kořeny si označil a, b, c a tak dlouho si s nimi hrál, až vypočítal hodnotu $a^8 + b^8 + c^8$. Zvládnete to také bez vyřešení rovnice?

Úloha 3.3. Protože Vánoce jsou svátky pohody, klidu a přátelství, tak jako každým rokem je děti slaví dohromady. Sejdou se pod stromečkem a rozbalují příklady, dokud je všechny nerozbalí a nevyřeší. A na Matěje letos pod stromečkem čekal opravdu náročný úkol. Měl najít všechna celá čísla, která jsou řešením rovnice

$$(m^2 - n^2)^2 = 16n + 1.$$

A protože už měli Kouma s Ňoumou své příklady vyřešené a Liběnka se také nudila, protože ještě žádný příklad nedostala, vrhli se všichni na Matějův příklad. Tak kdo ho vyřeší první? Matěj, Kouma, Ňouma, Liběnka a nebo ty?

Úloha 3.4. Když vešel Henry do pokoje, úplně se zděsil. Místo toho, aby hrály matematické koledy, jedlo se speciální matematické cukroví a rozbalovaly se další dárky pod stromečkem, tak všechny čtyři děti seděly nad papírem a tužkou a ani nedutaly. Kouma seděl od Ňoumy ve vzdálenosti x, Ňouma od Matěje ve vzdálenosti y a Matěj od Liběnky ve vzdálenosti z. Součet všech těchto tří vzdáleností je 6. Součet všech tří převrácených hodnot vzdáleností zvětšený o čtyřnásobek převrácené hodnoty součinu těchto vzdáleností je roven 2. Určete všechny možnosti, jak daleko od sebe děti mohou sedět.

Úloha 3.5. Klevrovi měli doma krásný vánoční ubrus. Byl to kruh a v něm byl vepsaný tětivový lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD. A protože to byl ubrus u matematiků, už se na něm nejednou pokoušel vymyslet Henry nějakou úlohu. Takže na tomto ubrusu už byl zaznačen i bod E, což byl průsečík úhlopříček lichoběžníku. My si nyní ještě doplníme bod F, což bude průsečík tečen sestrojených k opsané kružnici (ubrusu) v bodech B a C. Dokažte nyní, že přímky EF a AB jsou rovnoběžné.

Úloha 3.6. Ani v Lenošíně nemají fádní vánoční ubrusy, ale mají je zase jinak vyzdobené. Ten, se kterým se dnes seznámíte, má na sobě spoustu hvězdiček. Liběnka si ubrus prohlédla a zjistila, že jich je přesně n. Také si všimla, že středy žádných tří hvězdček neleží na přímce a že existuje přirozené číslo k takové, že pro každou hvězdičku existuje k hvězdiček, které od ní mají stejnou vzdálenost (Liběnka měřila vzdálenost středů). Dokažte, že $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Úloha 3.7. Poslední dárek, který letos ležel pod stromečkem, patřil Henrymu. Když jej rozbalil, vyskočila na něj dvě daná nesoudělná přirozená čísla p, q, pro která platí $p > q > 0$. Najdi Henry, no tak najdi všechny dvojice reálných čísel c, d takové, že každé přirozené číslo m patří do *právě* jedné z množin[1]

$$A = \left\{ \left\lfloor n\frac{p}{q} \right\rfloor | n \in \mathbb{N} \right\} \text{ a } B = \{ \lfloor cn + d \rfloor | n \in \mathbb{N} \} .$$

Henry je po chvíli našel, najdete je také?

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`

[1] Symbolem $\lfloor x \rfloor$ značíme dolní celou část z čísla x, tedy největší přirozené číslo nepřevyšující x.