Zadání 2. série

Geometrie

Termín odeslání: 28. listopadu 2011

autor: *Bori a Myreg*

Úloha 2.1. Už je podzim a Matěj se dneska rozhodl, že je správný čas na to, aby zoral svoje čtvercové políčko. Ale nebyl by to Matěj, kdyby to oral pěkně po řádcích. Jak po prvních 10 minutách pole vypadalo po Matějově zorání? Byly na něm tři zorané linky, každá začínala i končila na jednom z okrajů pole a žádné dvě se neprotínaly. Prodloužením těchto linek šlo získat trojúhelník, jehož vrcholy byly mimo pole. A Matěje hnedka napadlo, jak by se dal sestrojit střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku a už křičel na Liběnku, ať mu s tím příkladem jde pomoct. (Konstrukci smíte provádět pouze na poli.)

Úloha 2.2. Liběnka Matějův příklad hravě vyřešila a samozřejmě chtěla Matěje taky popíchnout nějakým příkladem a už vymýšlela. „Matěji, vidíš tamhle ty tři pampelišky, jak ti tu krásně tvoří tojúhelník? Jenom pomocí kružítka nalezni patu kolmice z první pampelišky na přímku, kterou tvoří druhé dvě pampelišky, zvládneš to?“

Úloha 2.3. A kde tou dobou vězel jejich tatínek Henry? Zrovna se pokoušel přijít na to, kde se tady vzaly ty kruhy v obilí. Byly dva a protínaly se. Po chvilce ho to přestalo bavit, beztak to byli zase nějací mimozemšťani a raději si sám pro sebe vymyslel úlohu. Dokážu pouze pomocí pravítka sestrojit střed jednoho z kruhů? (Mám k dispozici pouze pravítko bez rysky, které nemá ani měřítko, pouze umí vytvořit přímku procházející dvěma danými body.)

Úloha 2.4. Matěj s Liběnkou seděli po náročném orání a k tomu ještě přemýšlení s čajem na terase, když vzal Matěj najednou čtvercový papír $ABCD$ s délkou hrany 1 a začal ho roztodivně přehýbat. Nejprve ho přeložil na tři stejné části dvěma rovnoběžnými přehyby p,q. Následně papír zpřehýbal tak, aby se vrchol D přeložil na hranu AB a průsečík p s hranou CD se přeložil na přehyb q. A pak na Liběnku vychlil: „Dokaž, že $\frac{|D'B|}{|AD'|} = \sqrt[3]{2}$, kde D' je obraz bodu D na hraně AB po přeložení. Že to nestihneš dřív, než si nachystám svačinu?“ Pomůžete trochu Liběnce, ať se Matěj diví, jak je šikovná?

Úloha 2.5. Kouma s Ňoumou seděli takhle večer u televize a tam běžel nějaký zvláštní pořad. Okolo kulatého stolu tam seděla v libovolném pořadí přirozená čísla 1 až 10. A Koumovi to nedalo a už dával úkoly Ňoumovi: „Ňoumo, dokaž, že zde existuje číslo, které v součtu se svými sousedy dává alespoň 17. A platí to i pro 18? A co pro 19?“

Úloha 2.6. Hnedka po vyřešení to kluci přepli radši na jiný kanál a tam byl zrovna fotbal. Hrál se fotbalový turnaj mezi 17 družstvy metodou každý s každým a hrál se tři dny. A to už Ňoumu zase napadly otázky pro Koumu: „Koumo, dokaž, že existují tři družstva, která sehrála všechny tři vzájemné zápasy ve stejný den.“

Úloha 2.7. Ani fotbalový příklad kluky nezaskočil a protože už v televizi nebylo vůbec nic zajímavého, tak se rozhodli, že se půjdou podívat ke Klevrům, co je nového. Otevřel jim Henry a hnedka hlásí: „Dovnitř smí jen ten, kdo dokáže, že posloupnost $2^n - 3$ obsahuje nekonečně mnoho čísel, z nichž každá dvě jsou nesoudělná.“

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`