Zadání 1. série

Pravda a lež

Termín odeslání: 17. října 2010

autor: *Vlado a Zbyněk*

Úloha 1.1. Klevrovi očekávali návštěvu a na stole už měli nachystané zákusky. Tři z nich však zmizely dříve, než návštěva přišla. Takto se vymlouvali:

Liběnka: „Pokud měla zákusek Bubla, Matěj neměl.“

Bubla: „Liběnka snědla nejméně dva zákusky.“

Henry: „Pokud měl zákusek Matěj, donesl jeden i Buble.“

Matěj: „Děvčata žádné zákusky neměla.“

Ti, kdo žádné zákusky nesnědli, mluvili pravdu, ostatní mohli (ale nemuseli) lhát. Kdo snědl kolik zákusků, pokud každý zákusek snědl jeden z těchto čtyř lidí?

Úloha 1.2. Kouma s Ňoumou zatím hráli hru. Kouma si myslel dvě čísla a, b od 1 do 10, pro která platilo $a > b$. Ňouma v každém kole řekl, zda hádá $a + b$, nebo $a - b$ a tipnul si číslo. Kouma mu pak odpověděl, zda je odpověď správná, menší nebo větší. Na kolik pokusů mohl Ňouma čísla uhodnout? Ukažte, že mu daný počet pokusů stačí, ať si Kouma vybere jakákoliv čísla a, b.

Úloha 1.3. „Paktéžkoliv ostatní zákusky nesníte, pustím se do nich, zbude na vás,“ pronesl Henry. Děti se tvážily trochu zmateně a tak jim vysvětlil, že „paktéžkoliv“ je logická spojka spojující tři věty, která říká, že pokud platí první, pak současně platí druhá a neplatí třetí. Matematicky se značí symbolem $\otimes$ a pomocí běžných spojek ji dokážeme zapsat takto $\otimes(A, B, C) = A \Rightarrow (B \wedge \neg C)$. Pak dal dětem za úkol dokázat, že vše, co lze vyjádřit pomocí $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ lze vyjádřit pomocí této jedné parádní spojky.

Úloha 1.4. Do Hloupětína zavítala trojčlenná delegace z Logistánu – pan Poctivý, pan Falešný a pan Pošetilý. Pan Poctivý vždy říkal pravdu, pan Falešný vždy lhal a pan Pošetilý odpovídal na otázky náhodně. Bohužel nikdo nevěděl, který je který. Další problém byl v tom, že mluvili Logistánsky. Na otázky odpovídali vždy „Puf“ nebo „Huf“, ale nikdo z Hloupětína nevěděl, které ze slov znamená ano a které ne. Kouma dostal v rámci diskuse možnost zeptat se na tři otázky (každou jen jednoho, ale libovolného kandidáta). Jak se má ptát, aby zjistil identitu všech kandidátů?

Úloha 1.5. Ptal se Kouma Ňoumy, jaká jsou jeho oblíbená čísla, a Ňouma pravil: „Mám rád všechna taková přirozená čísla, v nichž každá cifra je větší než všechny napravo od ní.“ Kolik je Ňoumových oblíbených čísel?

Úloha 1.6. Ptal se Ňouma Koumy, jaká jsou jeho oblíbená čísla, a Kouma pravil: „Mně se přirozené číslo n líbí, pokud $9^n - 2 \cdot 3^n + 1$ dělí číslo $3^{n(3^n-1)} - 1$.“ Ňoumovi hned došlo, že se Koumovi vlastně líbí všechna přirozená čísla, ale neuměl to dokázat. Pomůžete mu?

Úloha 1.7. Zatímco Ňouma koumal, cvičil si Kouma rýsování opsaných kružnic. Nejprve narýsoval kružnici opsanou trojúhelníku ABC, následně opsal kružnici trojúhelníku DEF, kde D, E, F jsou středy stran trojúhelníka ABC. Byl tuze překvapen, že měly vzniklé kružnice vnitřní dotyk. Dokažte, že oba Koumovy trojúhelníky jsou pravoúhlé.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://brkos.math.muni.cz/`