Zadání 6. série

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE

Termín odeslání: 2. května 2011

autor: *Zbyněk*

Úloha 6.1.

Zas je tu, jaro je tu, lidi šílí, líbaj se jak o život navzájem... hraje z rádia a Liběnka už hledá Mateje. Kde jen může být? Že by venku pod rozkvetlou třešní? Rychle mrkne na zahradu. Ano, je tam a běží za ním. „Mateji, já jsem ráno četla v Hloupětínském zpravodaji, že na prvního máje musí holce nějaký kluk vyřešit funkcionální rovnici, aby neuschla. Tak já tu pro tebe jednu mám: najdi všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$f(x) + f(2y) = f(2x + y)$$

pro všechna reálná x, y."

Úloha 6.2. Láska je láska, když choděj kluci s holkama... Matěj se venku prochází pod rozkvetlou třešní a přemýšlí nad Liběnčinou úlohou. Najednou ho to napadne, vždyť je to tak snadné, ale stejně jí to nedaruje. „Liběnko, já jsem zase četl, že když ten kluk té holce rovnici vyřeší, tak jí musí taky jednu dát!" „Tak dávej Mateji," vyhrkla rozesmátá Liběnka. „Najdi všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující $f(1) = 1$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(f(y)) + 3xy^6 + 3x^2 f(y)."$$

Úloha 6.3.

Ani Henry nezahálí a otevírá všechna okna dokořán, poslouchá zpěv ptáčků a přemýšlí nad úlohou, co mu včera přinesl jeho kamarád. Kdyby ji nevyřešil, tak by se asi hodně styděl, pomůžete mu? Dostal za úkol najít všechna přirozená n taková, že existuje monotónní funkce f splňující $f(1) = 42$ a

$$\underbrace{f(f(\dots f(}_{n} x)\dots) = x.$$

Úloha 6.4.

Matěj samozřejmě věděl, že je to s tou prvomájovou tradicí úplně jinak, a tak nechal Liběnku Liběnkou a pospíchal za Bublou. Už se ji chystal políbit, když jej překvapila otázkou: „Víš, co jsem četla ráno v Hloupětínském zpravodaji?" Matěj si povzdychl, vytáhl z kapsy papír a tužku a začal si psát:

Nechť $c(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2011}\right)$, $s(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2011}\right)$ a $M = \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{cotg}(\frac{k\pi}{2011}) | k \in \mathbb{Z}\}$. Najdi všechny funkce $f : M \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna x z definičního oboru rovnost

$$f\left(\frac{c(1)x - s(1)}{s(1)x + c(1)}\right) + f\left(\frac{c(2)x - s(2)}{s(2)x + c(2)}\right) = \frac{c(5)x - s(5)}{s(5)x + c(5)} - \frac{c(3)x - s(3)}{s(3)x + c(3)}.$$

BRKOS Team 2011

Úloha 6.5.

V posledních několika letech se Lenošín pěkně rozrostl, a to jak do počtu obyvatel, tak i o mnoho nových náměstí. To, o kterém vám povíme dnes, má uprostřed trojúhelníkovou kašnu (označme její vrcholy A, B, C). V její blízkosti, konkrétně v bodech P a L, se nachází sochy lenošínských patronů – svatého Prokrastiniána a Letargiána. Víme, že čtyřúhelníky $ABLC$ a $ABCP$ jsou konvexní a že platí následující rovnosti úhlů:

$$|\angle BCL| = |\angle ACP| = 40^\circ,$$
$$|\angle LBC| = |\angle CAP| = 70^\circ.$$

Dokažte, že $|AL| = |BP|$.

Úloha 6.6.

Kouma s Ňoumou lenošili tou dobou na zahrádce a počítali pokoutníky (p), květopasy (q), rybenky (r), sklípkany (s), tesaříky (t), užovky (u) a vodomily (v). Zjistili, že všechna spočtená čísla jsou prvočísla (ne nutně různá) a splňují rovnost

$$p^3 - p = q^2 + r^2 + s^2 + t^2 + u^2 + v^2.$$

Určete, kolik kterých živočichů napočítali.

Úloha 6.7.

Liběnka upekla čtvercovou buchtu a umístila na ni 99 hrozinek. Dávala si přitom záležet, aby každé dvě měly od sebe vzdálenost alespoň centimetr. Po chvilce vůně buchty přilákala Matěje, který dostal náramnou chuť na hrozinky. Liběnka mu dovolila jich několik vyloupnout, ale pod podmínkou, že každé dvě vyloupnuté hrozinky budou mít od sebe vzdálenost alespoň $\sqrt{3}$ centimetrů. Protože šlo o jídlo, přišel Matěj velmi rychle na to, jak ukořistit maximální počet hrozinek. Dokažte, že se mu jich povedlo získat alespoň jedenáct.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://ganymed.math.muni.cz/brkos`