Zadání 5. série

INVARIANTY

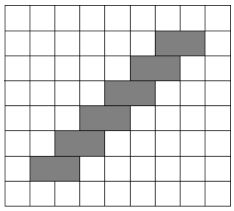
Termín odeslání: 28. března 2011

autor: *Myreg*

Úloha 5.1.

A začalo nám jaro. Sluníčko svítí, tráva se začíná zelenat, Liběnka vyběhla ven s míčem: „Matěji, pojď si házet." „Nemůžu, počítám jamky!" Matěj seděl na trávníku, před sebou měl 2011 jamek a mezi nimi čáry vyryté tak, aby byly všechny jamky spojené do jednoho mnohoúhelníku. „Liběnko, co myslíš, existuje přímka, která bude protínat všechny hrany v tomto mnohoúhelníku?"

Úloha 5.2.



„To je snadné Matěji," řekla po vyřešení Matějova problému Liběnka. „Mám pro tebe lepší příklad!" Před jejich domem jim Henry vydláždil obdélník 8×9, jak vidíte na obrázku. Aby to nebylo jen tak obyčejné, ozdobil jej 6 dvojkostkami. „Matěji, jaký je největší počet dvojkostek, které lze ještě umístit do našeho vydlážděného obdélníku?" (Dvojkostky mohou být položeny pouze svisle nebo vodorovně, musí zakrývat právě dva sousední čtverce a samozřejmě už nesmí být položeny tam, kde už nějaké jsou.) Poradíte Matějovi, kolik jich nejvíce může použít?

Úloha 5.3.

Poté, co děti položily kostky, se jim už nechtělo moc hýbat a chtěly jen trochu přemýšlet, tak zaběhly za Henrym a začaly škemrat o nějaký příklad. A Henry se nenechal dlouho pobízet. Tak si představte, děti, množinu přirozených čísel od 1 do 2011. Budete se střídat. V každém kroku vybere jeden z vás nějaká dvě čísla u, v a nahradí je číslem $2uv + u + v$. Po 2010 krocích vám zbyde jediné číslo. A na vás teď bude určit množinu všech čísel, která vám mohou zbýt.

Úloha 5.4.

Henry byl spokojený, že děti tak pěkně do oběda zabavil a sám si vzal noviny, kafíčko a posadil se do křesla. Ale to mu dlouho nevydrželo. „No, to snad není možné! Vždycky tady v sekci logika byl nějaký těžký příklad a teď sem dají takový jednoduchý. Co budu teďka do oběda dělat?" Chcete vědět, co tak Henryho pobouřilo a zvedlo ze židle? V novinách stálo:

Na (oboustranně) nekonečný pás rozdělený na čtverce je naskládáno konečně mnoho kamenů. V každém kroku provedeme jeden z následujících tahů:

- Odebereme jeden kámen z pozice $n-1$ a n a přidáme jeden kámen na pozici $n+1$.

- Odebereme dva kameny z pozice n a přidáme po jednom kameni na pozice $n-2$ a $n+1$.

Dokažte, že posloupností těchto tahů se musíme dostat do stavu, kdy ani jeden z těchto tahů nelze provést a rozložení kamenů v tomto stavu nezávisí na operacích, které jsme prováděli (ale pouze na počátečním rozdělení kamenů).

Úloha 5.5.

Za to v Lenošíně byl pěkný jarní zmatek. Všichni pobíhali a hledali kousek papíru a tužku. Vyhlásili zde totiž tzv. jarní příklad a kdo ho vyřeší jako první, ten nemusí dělat jarní úklid. A toho, že budou muset uklízet, se všichni Lenošínští bojí ze všeho nejvíc. Měli dokázat, že $a^2 - c^2 = ab$, pokud a, b, c jsou reálná nenulová čísla taková, že platí $a^2 - b^2 = bc$ a $b^2 - c^2 = ca$. Také se vám nechce uklízet? Tak to rychle vyřešte jako první!

Úloha 5.6.

Kouma se tiše schovával na zahradě a doufal, že i když jarní příklad nevyřešil jako první (prý ho předběhl nějaký BRKOSák, hrůza), nebude muset uklízet. A aby se nenudil, kreslil si do písku kružnice. Nejprve nakreslil dvě kružnice k, l, které měly stejný poloměr a protínaly se v bodech B a C. Jako X si označil střed úsečky BC. Dále si označil bod A, který leží na kružnici k a zároveň vně kružnice l. Polopřímky AB, AC protínají l v A_1, A_2 a polopřímky A_1X, A_2X protínají k v P_1, P_2. A pak ho to napadlo. „Už to mám! Dokážu, že $|AP_1| = |AP_2|$.“ Dokážete to dokázat dřív než lenošný Kouma?

Úloha 5.7.

To Ňouma byl daleko poctivější. Pečlivě uklízel každé přebytečné smítko, co mu po zimě zůstalo na stole. A nebyl by to Ňouma, kdyby si ta smítka nespočítal. Bylo jich dohromady x. A pak se vrhl na Koumův stůl, protože Kouma kdovíkde vězel a úklid se přeci nesmí zanedbat. Koumův stůl obsahoval y smítek. Ale to je náhoda, že dvojnásobek druhé mocniny počtu Ňoumových smítek zmenšený o jedničku se rovnal patnácté mocnině počtu Koumových smítek, že? Dokažte, že měl Ňouma na stole buď 1 smítko, nebo nějaký počet dělitelný pěti.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
http://ganymed.math.muni.cz/brkos

BRKOS Team 2011