Zadání 4. série

# Kruhová inverze

Termín odeslání: 20. února 2011

autoři: *Zuzka a Emu*

**Úloha 4.1.**

Matěj s Liběnkou si venku užívali zimní radovánky a najednou je napadl ten samý nápad. Každý z nich začal vyšlapávat kružnici, protože se ale nedomluvili, tak se jejich kružnice protly ve dvou bodech, označme je $A$, $B$. Jelikož se jim obrázek zdál nedokonalý, tak se rozhodli, že každý vyšlape ještě jednu kružnici, tak aby tyto kružnice měly vnější dotyk s již vyšlapanými kružnicemi. Body, ve kterých se druhá Liběnkou vyšlapaná kružnice dotýkala těch prvních dvou označme $C$, $E$. Dotyky Matějovy druhé kružnice s původními dvěmi označme $D$, $F$. Pomohli byste nyní Matějovi a Liběnce dokázat, že kružnice opsaná trojúhelníku $ACE$ má jediný společný bod s kružnicí opsanou trojúhelníku $ADF$?

**Úloha 4.2.**

Henry je pozoroval z okna, jak si hrají, ale za chvíli si okno zamlžil a už na ně neviděl. Rozhodl se proto jej očistit, ale nebyl by to Henry, kdyby si to nečistil nějak systematicky. Nejprve si tedy vykreslil do zamlženého okna kružnici $l$. Poté **okolo ní** nakreslil kružnici $k$ tak, aby měla s kružnicí $l$ jeden společný bod $A$. Pak se rozhodl vytvořit tečnu ke kružnici $l$ procházející zvoleným bodem $B$ na kružnici $l$. Tato tečna mu protla kružnici k v bodech $E$, $D$. Dále si označil $C$ střed toho oblouku $DE$ kružnice $k$, který neobsahuje bod $A$. Pak začal přemýšlet, zda body $A, B, C$ leží na jedné přímce. Než to však stihl dokázat, sklo se odmlžilo.

**Úloha 4.3.**

V zimní čas byla u Matěje a Liběnky na návštěvě babička. Byla zrovna v kuchyni a vykrajovala perníčky, když se otevřely dveře a obě děti vběhly do kuchyně jako velká voda a hned, že chtějí taky vykrajovat. Liběnka začla a vykrojila do těsta kružnici $k$. Matěj navázal a vyřízl do těsta kružnici $l$ (označme průsečíky těchto dvou kružnic $A$, $C$). Matějovi s Liběnkou to pořád nestačilo a ještě vykrojili v obrázku dvě přímky. Jedna byla tečna ke kružnici $k$ a kružnicí $l$ protínala v bodech $A$ a $D$. Druhá byla tečna ke kružnici $l$ a kružnici $k$ protínala v bodech $A$ a $B$. Děti hned napadlo, jestli platí $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |AD|$, ale než to stihli dokázat, už jim brala těsto z pod rukou babička a dávala ho, nechápajíc, co to vytvořili, na plech. Stihnete to dokázat dřív než děti?

**Úloha 4.4.**

A to už děti volal Henry do pokoje, ať se jdou podívat na novou hru, kterou jim koupil. Tato hra měla velmi zvláštní herní plán. Vypadalo to jako podivný geometrický obrazec sestrojený ze dvou kružnic $k$, $l$ protínajících se v bodech $A$, $D$. Dále byla na plánku společná tečna těchto kružnic, která byla blíž k bodu $A$ a dotýkala se kružnice $k$ v bodě $E$ a kružnice $l$ v bodě $F$. Pak tu byla také rovnoběžka s touto tečnou vedená bodem $D$, která protínala kružnici $k$ v bodě $C$ a kružnici $l$ v bodě $B$ (oba body jsou různé od bodu $D$). A ještě tu byly dvě kružnice, jedna opsaná trojúhelníku $CDF$ a druhá $BDE$, které se protínaly v bodě $P$. Cílem hry bylo projít za určitých pravidel po přímce skrz body $D$, $A$ a $P$. Ale leží tyto body vůbec na přímce? Dokažte to.

---

**Úloha 4.5.**

Ani Kouma s Ňoumou v tenhle zimní čas nezaháleli a trénovali své matematické mozky. Tentokrát přišel Kouma za Ňoumou se soustavou rovnic

$$x^2 + xy + xz - x = 2$$
$$y^2 + xy + yz - y = 4$$
$$z^2 + xz + yz - z = 6$$

a slíbil mu, že pokud najde všechna řešení této soustavy v oboru reálných čísel, dá mu oříškovou čokoládu. A Ňouma má oříškovou čokoládu zatraceně rád. A co vy? A uměli byste to vyřešit?

**Úloha 4.6.**

Za Hloupětínem stojí 20 památných stromů. Hloupětínští radní se je rozhodli zpřístupnit veřejnosti, a tak mezi nimi postavili síť cyklostezek. Cyklostezka vždy začínala i končila u některého ze stromů a nevedla kolem žádného dalšího stromu. Mezi každými dvěma stromy vedla nejvýše jedna cyklostezka. Protože radní nebyli žádní hlupáci, navrhli cyklostezky chytře. Aby se cyklisté nesráželi, nechali radní vybudovat mimoúrovňová křížení všude tam, kde se cyklostezky křížily (možnost dostat se z jedné cyklostezky na druhou tak byla pouze u stromů). A aby cyklisté nebloudili v kruzích, zavedli radní na cyklostezkách přikázaný směr jízdy tak, že se jezdec nikdy nemohl vrátit ke stromu, u kterého už byl.

Nejpamátnější z památných stromů se nazývaly Dutoň a Křivoň. Mohli radní navrhnout stezky tak, aby se cyklista dodržující přikázaný směr jízdy mohl po cyklostezkách dostat od Dutoně ke Křivoni **právě** 2011 různými cestami?

Plný počet bodů dostanete, pokud správně a úplně zdůvodníte, zda se jim to mohlo povést. Bonusový půlbod nemine ty, kteří navíc zjistí, pro jaká $n$ by to bylo možné, kdyby stromu nebylo 20 ale $n$ a ostatní podmínky zůstaly splněny.

**Úloha 4.7.**

O Vánocích byly v Hloupětíně trhy a na náměstí stálo $n$ stánků očíslovaných čísly 1 až $n$ se všemi možnými cukrlátky, medovinkami, klobáskami, zimními čepičkami, brašnami, náušnicemi a se spoustou dalších věcí. Protože jsou hloupětínští trošku hloupí a neuměli by mezi těmito stánky projít tak, aby prošli všechny stánky a přitom žádný dvakrát, rozhodli se radní, že nařídí přesné pořadí, podle kterého se musí tyto stánky projít. Na náměstí se sešlo $n$ lidí, že si chtějí něco na stáncích koupit. Rozejdou se nyní v pořadí od prvního k poslednímu podél stánků. Každý hloupětínský má rád jeden z těchto $n$ obchůdků a chystá se v něm nakoupit něco na Vánoce. Jestliže v „jeho“ stánku ještě nikdo nenakoupil, tak nakoupí, je spokojený a odchází domů. Pokud už v jeho oblíbeném obchůdku někdo před ním nakoupil, jde k nejbližšímu dalšímu stánku, kde ještě nikdo nenakupoval a věc, co tento stánek prodává, si zakoupí. Pokud už na žádný takový stánek nenarazí, uraženě odchází a už se nevrátí. Číslo oblíbeného obchodu $i$-tého hloupětínského občana označme $a_i$. Kolik existuje $n$-tic $(a_1, \ldots, a_n)$ takových, že každý hloupětínský si něco nakoupí?

**Svá řešení posílejte na adresu:**
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

**nebo uploadujte na našich stránkách:**
`http://ganymed.math.muni.cz/brkos`