Zadání 2. série

NÁHODNÉ PROCHÁZKY

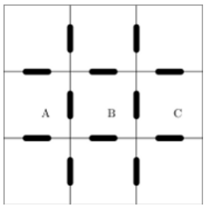
Termín odeslání: 22. listopadu 2010

autor: *Zbyněk*

Úloha 2.1.

Henry při své noční pochůzce Hloupětínem narazil na opilce. Ten každou vteřinu udělá s pravděpodobností $\frac{4}{9}$ krok dopředu, s pravděpodobností $\frac{4}{9}$ zůstane stát na místě a s pravděpodobností $\frac{1}{9}$ udělá krok dozadu. Jaká je pravděpodobnost, že po t vteřinách ujde k kroků dopředu od místa, kde ho Henry začal pozorovat?

Úloha 2.2.



Kouma se ocitl v bludišti zobrazeném na obrázku. Bludiště se skládá z devíti místností, každé dvě, které sousedí stěnou jsou propojeny dveřmi. Kouma začíná v místnosti A, snaží se dostat do místnosti C. Všechny dveře se dají otevřít z obou stran, akorát dveře do místnosti B jsou pouze jednosměrné. Protože je zmatený, vybírá si náhodně dveře, které otevře. Jaká je pravděpodobnost, že z místnosti A dojde do místnosti C, aniž by uváznul v místnosti B?

Úloha 2.3.

Kouma se dostal z bludiště a vyšplhal na mlžnou pláň. Mlha na ní byla tak hustá, že přes ni nebylo vidět ani slyšet a snadno se v ní zabloudilo. Navíc byla nekonečná na všechny strany. Ňouma na Koumu čekal v mlze přesně z sáhů západně a s sáhů severně. Oba si vyšli naproti, a to tak, že Kouma šel s pravděpodobností 0,3 na západ, s pravděpodobností 0,3 na sever, s pravděpodobností 0,2 na jih a s pravděpodobností 0,2 na východ. Oba dělali vždy přesně sáhové kroky. Ňouma měl pravděpodobnosti svých kroků stejné, akorát na opačné strany. Jaká je pravděpodobnost, že oba byli po k krocích na stejném místě?

Úloha 2.4.

Před hloupětínským kinem stojí 15 boháčů a 25 žebráků a všichni chtějí zhlédnout film, na který je vstupné padesát korun. Každý boháč má u sebe právě jednu stokorunu, každý žebrák právě jednu padesátikorunu (jiné mince ani bankovky nemají). Kino právě otvírá, pokladní má prázdnou kasu. Jaká je pravděpodobnost, že když se boháči a žebráci seřadí ve frontě náhodně, bude mít paní pokladní vždy na vrácení a všichni zvládnou zaplatit za film?

Úloha 2.5.

Kouma si narýsoval trojúhelník a rozhodl se, že jej rozdělí dvěma přímkami na několik částí tak, aby každá byla souměrná podle nějaké osy. Jak to má udělat, aby se mu to povedlo pro obecný trojúhelník?

Úloha 2.6.

Kouma si vybral přirozené číslo n a prohlásil, že z každé množiny přirozených čísel velikosti $2 \cdot 3^n - 1$ umí vybrat 3^n čísel tak, že je jejich součet dělitelný 3^n. Ňouma ho chtěl trumfnout a řekl, že takových 3^n čísel zvládne vybrat z jakýchkoliv $2 \cdot 3^n - 2$ čísel. Kdo z nich měl pravdu a proč?

Úloha 2.7.

Mezitím co Kouma počítal, Ňouma seděl u televize a sledoval Hloupětínský receptář. Právě tam ukazovali, jak se omezují výrazy. Pro Ňoumu to byla brnkačka, protože si to pamatoval z loňské třetí série. Na závěr dali divákům za úkol dokázat, že výraz $(ab + bc + ac)\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(\mathbf{b}+\mathbf{c})^2} + \frac{1}{(\mathbf{c}+\mathbf{a})^2}\right]$ lze omezit zdola číslem $\frac{9}{4}$, pokud jsou a, b, c kladná (tedy že pro žádná **kladná** a, b, c **není hodnota výrazu menší než** $\frac{9}{4}$). Dokázali byste to také?

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

`http://bart.math.muni.cz/~brkos`