Zadání 1. série

# Afinní roviny

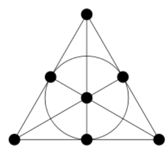
Termín odeslání: 25. října 2010

autoři: *Lenka a Zbyněk*

**Úloha 1.1.**

To už tak jednou končilo léto, ale ještě pořád svítilo sluníčko, a Liběnka chytala poslední bronz venku na zahradě. Jak měla zavřené oči, tak si vzpomněla na dovolenou v zahraničí, kde potkala zvláštní skupinku 25 lidí. Byli dohromady z 5 různých států a každý z nich měl na sobě tričko jedné z 5 barev (**žádní dva lidé stejné národnosti neměli tričko stejné barvy**). Najednou ji napadlo: „Dokázala bych je seřadit do čtverce tak, aby v žádném sloupci ani řádku nebyli dva lidé stejné národnosti **a aby v žádném řádku ani sloupci nebyli dva lidé** se stejnou barvou trička?“ Nedalo jí to a už si běžela pro papír si to nakreslit. Pomůžete jí?

**Úloha 1.2.**



Ještě než si Liběnka stihla vyřešit svoji úlohu, už tu byl Matěj s nějakou čmáranicí a mával jí s tím před obličejem. „Liběnko, schválně, že neuhodneš, co to je!“ Liběnka se vyčítavým pohledem rychle mrkla na Matějův papír, ale bylo na něm pouze pár teček a nějaké spojnice mezi nimi (viz. obrázek). Než se stačila Liběnka zamyslet, už na ni Matěj znovu pokřikoval: „Liběnko, to je přeci Fanova rovina! Ale dám ti úkol. Kolika způsoby ji můžeme zobrazit samu na sebe tak, aby trojice, které byly spojené (přímkou nebo kružnicí), zůstaly spojené?“

**Úloha 1.3.**

Mezitím, co děti byly venku na zahradě, se Henry díval na televizi. Zrovna běžela jakási sportka, ve které je výhra za uhodnutí vylosované dvojice z 25 čísel. Na tiketu však lidé mohou vyplnit 5 čísel a vyhrají, pokud mají zatržená obě losovaná čísla. A Henry přemýšlel: „Kolik nejméně tiketů bych si musel koupit a zatrhnout, abych měl jistou výhru? A která čísla bych vlastně musel na těch tiketech zatrhnout?“ Stihnete to vymyslet dříve než Henry?

**Úloha 1.4.**

Henrymu úloha moc dlouho netrvala, a tak se vydal na zahradu podívat se to, co tam děti vyvádějí. Než ale vyšel ze dveří ven, všiml si, že mu na nástěnce visí ještě jedna nevyřešená úloha. „Nu což, děti určitě nic nevyvedou a já tu mám tuhle úlohu už tak dlouho, že je ostuda, že tu ještě visí.“ Henry se totiž vždycky zarazí v úvodu, měl by ji už jistě dávno vyřešenou, ale z definice na to ne a ne přijít. Ta úloha zní: z definice afinní roviny (opakuji, z definice) ukažte, že konečná afinní rovina má pro nějaké přirozené $n$ právě $n^2$ bodů a $n^2 + n$ přímek, na každé je právě $n$ bodů a každým prochází $n + 1$ přímek. Pomůžete Henrymu, ať už ho tato úloha tak netíží?

---

**Úloha 1.5.**

Zato Kouma neměl sluníčko vůbec rád. V těchto vedrech chodil nejčastěji do lesa, aby se trošku schladil. Moc rád hledal houby, ale to šlo jen po dešti a teď zrovna vůbec žádné nerostly. Dneska vytáhl i Ňoumu, ať se po tom lese neloudá sám. Ňouma se ho snažil v těchto dnech rozveselit, a tak vždycky přišel s nějakým zajímavým problémem. Zrovna uviděl na zemi několik hromádek šišek a povídá: „Koumo, podívej na ty tři hromádky šišek! To je ale zajímavé! Počet šišek na první hromádce (označme $a$) se přesně rovná vzdálenosti první hromádky od druhé. Počet šišek na druhé hromádce (označme $b$) se rovná vzdálenosti druhé hromádky od třetí. A počet šišek na třetí hromádce ($c$) je vzdálenost mezi první a třetí hromádkou.“ „No a co s tím?“ ptá se Kouma. „Dosaď si je nyní do této rovnice

$$x^2 + (2ab + 1)x + a^2 + b^2 = c^2$$

a dokaž, že pokud jsou řešením vzhledem k $x$ **celá** čísla, že ty hromádky šišek tvoří **pravoúhlý** trojúhelník.“ Zvládli byste to také dokázat?

**Úloha 1.6.**

Koumovi se hnedka srdíčko zatetelilo, když mohl použít v takovém neskutečném horku mozek a už vymýšlel příklad na oplátku Ňoumovi. „A teďka zase já! Vidíš támhleten kruh v obilí? Jak je vepsaný do toho trojúhelníku? Označ si střed té kružnice $O$ a vrcholy toho trojúhelníka $A, B, C$. Teď půjdeme po přímce směrem k bodu $O$ a postupně protneme přímky $AB$ v bodě $M$, $AC$ v bodě $N$ a $BC$ v bodě $P$. Samozřejmě přejdeme přes bod $O$. Zvládneš nyní dokázat, že

$$\frac{a}{|BP| \cdot |PC|} + \frac{b}{|CN| \cdot |NA|} + \frac{c}{|AM| \cdot |MB|} = \frac{(a+b+c)^2}{abc} \text{ ?“}$$

**Pozor, vzdálenosti uvažujeme orientované, jako např. v článku** `http://cs.wikipedia.org/wiki/Meneláova_věta`**. Pokud je např. bod $P$ vnitřním bodem $BC$, jsou vzdálenosti $BP$ a $PC$ orientovány shodně a jejich součin je kladný. Pokud by bod $P$ byl vnějším bodem úsečky $BC$, jsou vzdálenosti $BP$ a $PC$ orientovány opačně a jejich součin je záporný.**

**Úloha 1.7.**

Stejně jako každým rokem se i letos na konci léta pořádá mezi Lenošínem a Hloupětínem VMV (Velká matematická válka). Soupeří zde ty největší mozky z obou vesnic a snaží se vyřešit zapeklité příklady. Letos byla poměrně nízká úroveň, ale za to se objevil jeden příklad, který nakonec rozhodl o vítězi, kterým se stal jako každým rokem Lenošín (jsou sice líní, ale hloupí rozhodně ne;)). Troufnete si na takový příklad? Máte dokázat, že polynom s celočíselnými koeficienty nemůže splnit současně $P(a) = b$, $P(b) = c$ a $P(c) = a$ pro žádná tři různá celá čísla $a, b, c$.

**Svá řešení posílejte na adresu:**
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

**nebo uploadujte na našich stránkách:**
`http://bart.math.muni.cz/~brkos`