Zadání 6. série

Komplexní čísla

Termín odeslání: 26. dubna 2010

Úloha 6.1.

Lenošínská pošta představila svou zbrusu novou kolekci známek pro jaro 2010. Protože byl poštmistr současně členem klubu Lenošínského matematického pléna (známého jako LEMPL), rozhodl se na každé z nich zachytit nějakou 2010-tou odmocninu z 1. Kolekce tak čítala 2010 kusů známek. Na výstavu se přišel podívat i sám starosta. Protože nemohl zapřít svou LEMPLovskou minulost, v duchu čísla na jednotlivých známkách umocňoval na 2009. Když pak všechny takto získané mocniny sečetl, dostal ke svému překvapení reálné číslo. Jaké číslo to bylo?

Úloha 6.2.

Kousek od Hloupětína, za mlhou hustou tak, že by se dala krájet, se nachází malé jezírko. Na první pohled je obyčejné, ale na ten druhý si všimneme, že má tvar kruhu o poloměru přesně deset metrů. Na jeho obvodu stojí pět vrb, které tvoří pravidelný pětiúhelník. Když tam šli Matěj s Henrym řezat proutí na mrskačky, všimli si, že když vynásobí druhou mocninu vzdálenosti mezi sousedními vrbami a druhou mocninu vzdálenosti mezi vrbami nesousedními, dostanou tuze zajímavé číslo. Uměli byste ho spočítat také?

Úloha 6.3.

V neděli večer si Henry s Matějem začali dělat plán, jak nejlépe obejít chalupy všech známých v Hloupětíně. Matěj na mapě vyznačil Kleverovic domek jako bod A a navrhl jít přímou cestou do bodu B, kde bydlí Bubla. Henry namítl, že by bylo lepší se cestou stavit i v bodě E, který leží v půli cesty mezi A a B a kde bydlí jeho švagrová. Nakonec měli na plánku bodů osm. Body A, B, C, D, které tvořily konvexní čtyřúhelník, a body E, F, G, H, které byly postupně ve středech úseček AB, BC, CD a DA. Nejdále od Kleverovic domu byl bod C, k němu to byl vzdušnou čarou rovný kilometr. Když chtěl Matěj měřit vzdálenost od B k D, zarazil ho Henry: „To si přece můžeš spočítat, když víš že spojnice EG a FH jsou na sebe kolmé!“ Matěj musel uznat, že má Henry pravdu. Dokázali byste to také spočítat?

Úloha 6.4.

Ráno přišli Henry s Matějem za Bublou koledovat. Bubla jim ale řekla, že za koledu nic nedostanou, dokud nenajdou všechny polynomy f, pro které $f(x^2) = f(x)f(x+1)$. Dokázali byste jim s hledáním těchto polynomů pomoci?

BRKOS Team 2010

Úloha 6.5.

Kouma si s nějakým pletením mrskačky hlavu nelámal. Přišlo mu kýčovité, aby se všichni hloupětínští předváděli, jak slaví Velikonoce jen proto, aby se dostali do zadání šesté série. Místo toho ležel doma na gauči a v duchu hledal přirozená čísla n taková, že $2n-1$ a $5n-1$ jsou druhé mocniny přirozených čísel a $2n+5$ je prvočíslo. Zvládli byste je také všechny najít?

Úloha 6.6.

Když se Henry s Matějem vypořádali s polynomy, pozvala je Bubla dál. Nabídla jim rozkrájený mazanec, který sama napekla. Trošku se jí nepovedl, a tak získal tvar velmi plochého kvádru o hranách 20 cm, 20 cm a 2 cm. Při krájení vždy používala řezy rovnoběžné s některou z menších stěn kvádru, celková délka průmětů řezů (do roviny čtvercové stěny mazance) byla 360 cm. Řezy nemusely spojovat kraje mazance. Protože čekala hodně koledníků a chtěla, aby žádný z nich nedostal moc velký kus, snažila se rozkrájet mazanec tak, aby největší ze vzniklých dílků byl co nejmenší. Jaký nejmenší objem mohl největší dílek mít?

Úloha 6.7.

Když Koumu omrzelo hledání přirozených čísel se zajímavými vlastnostmi, šel se podívat, co dělá Ňouma. Našel ho u tabule, na kterou právě napsal čísla od 1 do 2010, každé dvakrát, a snažil se je přeuspořádat. Na Koumův dotaz, o co se snaží, odpověděl: „Chci je přerovnat tak, aby mezi dvěma výskyty čísla i bylo přesně $i-1$ čísel. Tedy mezi jedničkami nic, mezi dvojkami jedno číslo, … a takto až do 2010.“ „A ty věříš, že se ti to povede?“ zeptal se Kouma. Mohlo se to Ňoumovi povést? Pokud ano, jak? Pokud ne, proč?

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://bart.math.muni.cz/~brkos`.