Zadání 5. série

# POLYNOMY

Termín odeslání: 29. březen 2010

**Úloha 5.1.**

Do Silvestra zbývaly dva dny a Matěj s Liběnkou zrovna seděli u snídaně, když zazvonil pošťák. Děti mu ihned vyběhly v ústrety. Listonoš se na ně usmál a přes plot podal Liběnce lístek s novoročním $P(f)$ od Akademie hloupětínských matematiků. Liběnka si hned všimla, že pro letošní polynom $P(f)$ platí $P(1) = 2009$, $P(2) = 2010$ a $P(3) = 1989$, a hned to řekla Matějovi. A protože ho chtěla poškádlit, dodala: „Schválně, jestli uhodneš, jaký zbytek dává $P(f)$ po dělení $f^2 - 3f + 2$?“ Matěj jí po chvíli správně odpověděl. Zvládli byste to také?

**Úloha 5.2.**

Poslední odpoledne roku věnovali Henry, Liběnka, Matěj a Bubla výrobě chlebíčků. Matěj jich nachystal $a$, Liběnka $b$, Henry $c$ a Bubla $d$. Najednou Bubla řekla: „Také jste přišli na to, že polynom $x^6 - ax^5 + bx^4 - 20x^3 + cx^2 - dx + 1$ má kladné reálné kořeny?“ Matěj se praštil do čela: „Že jsem si toho nevšimnul hned!“ Jaké mohly být hodnoty $a, b, c, d$, aby měla Bubla pravdu?

**Úloha 5.3.**

Do konce roku zbývalo pár minut a z rádia zněl proslov lenošínského starosty, v němž chválil občany své obce za to, jak celý rok příkladně lenošili. Po něm se slova ujal starosta hloupětínský, který chválou také nešetřil. Jeho projev by se jistě protáhl přes půlnoc, kdyby nebyl přerušen odpočtem: „Deset, devět, osm, …“. Když Matěj ta čísla uslyšel, začal přemýšlet nad tím, kolik nejvýše různých hodnot z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$ může nabývat polynom $P(x)$ pátého stupně s celočíselnými koeficienty **pro celočíselná** $x$. Dokázali byste mu poradit?

**Úloha 5.4.**

Protože šly děti spát pozdě, probudil je až kolem desáté hodiny Henry: „Vstávat a cvičit! Jak na Nový rok, tak po celý rok! I mozek se musí tužit! Schválně jestli zjistíte, pro která $n > 1$ je polynom $x^{n(n-1)} + x^{n(n-2)} + \dots + x^n + 1$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$?“

**Úloha 5.5.**

Zabouchání na dveře vytáhlo Koumu od počítače. Zeptal se: „Kdo je tam?“ Z druhé strany se ozvalo: „Rekurze!“ Kouma ale věděl, že je to Ňouma a že mu nejspíš nese zajímavou úlohu. A nemýlil se. Na papírku, který mu kamarád předal, stálo:

*Posloupnost* $a_1, a_2, \ldots$ *je dána vztahy* $a_1 = 46$, $a_2 = 33$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$. *Najděte všechna i taková, že* $a_i$ *je druhou mocninou přirozeného čísla.*

**Úloha 5.6.**

O hloupětínských náměstích a jejich zajímavých tvarech již bylo napsáno mnoho knih a ještě větší počet matematických úloh. Je proto hříchem, že je stále opomíjeno *Náměstí distributivity*. Leží v severní části Hloupětína a má tvar trojúhelníka $ABC$. Druhý nejzajímavější fakt týkající se tohoto náměstí je, že stejná rovnoběžka, která prochází Hloupětínskou radnicí, vede přesně těžištěm tohoto náměstí. Ten úplně nejzajímavější fakt je, že když průsečíky zmíněné rovnoběžky se stranami $AB$, $AC$ označíme po řadě $M$, $N$, pak platí $\frac{|MB|}{|MA|} + \frac{|NC|}{|NA|} = 1$. Uměli byste dokázat úplně nejzajímavější fakt pomocí druhého nejzajímavějšího faktu?

**Úloha 5.7.**

Starostu Lenošína a Hloupětína nespojuje obyčejný telefonní kabel, ale tzv. červená linka. Z Lenošína do Ošklivína vede linka zelená, zkrátka všech 42 vesnic v okolí Hloupětína je pospojováno telefonními linkami některé ze čtyř barev (každé dvě vesnice jsou spojeny linkou nějaké barvy a každá barva je použita alespoň jednou). Dokažte, že lze vybrat několik vesnic tak, aby linky mezi nimi byly právě tří barev.

**Svá řešení posílejte na adresu:**
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

**nebo uploadujte na našich stránkách:**
`http://bart.math.muni.cz/~brkos`.