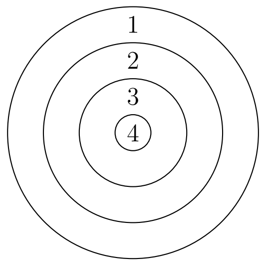
Zadání 4. série

GEOMETRICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

Termín odeslání: 22. února 2010

Úloha 4.1.

V hloupětínské restauraci se rozhodli uspořádat předvánoční turnaj v šipkách. Jejich terč má poloměr 35 cm a je třemi soustřednými kružnicemi o poloměrech 5, 15 a 25 cm rozdělen na oblasti, jejichž zásah je hodnocen jedním až čtyřmi body podle obrázku. Jaká je pravděpodobnost, že člověk třemi hody šipkou dosáhne součet šest bodů? Pravděpodobnost zásahu je rovnoměrně rozložena na ploše terče (tedy pravděpodobnost, že hráč terč mine, je nulová).



Úloha 4.2.

Matěj si usmyslel, že k Vánocům vyrobí Henrymu skládací metr. Koupil metr dlouhé dřevo zanedbatelné tloušťky. Aby to nebyl jen obyčejný metr, rozhodl se Matěj, že dřevo rozdělí na třech náhodně vybraných místech a ze vzniklých čtyř částí dárek vyrobí. Jaká je pravděpodobnost, že vyrobí metr tak, aby ho mohl Henry poskládat do tvaru čtyřúhelníku? Velikost kloubů metru zanedbáváme.

Úloha 4.3.

Když Matěj vyrobil metr, domluvil se s Liběnkou a Bublou, že půjdou další den společně na Vánoční trhy na Lagrangeově náměstí. Usnesli se, že se sejdou na náměstí mezi čtvrtou a pátou hodinou. Pravděpodobnost příchodu každého z nich je rozložena v tomto intervalu rovnoměrně a časy jejich příchodů jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají všichni tři, pokud je každý ochoten na náměstí čekat nejdéle 10 minut?

Úloha 4.4.

Ňouma s Koumou Vánoce neprožívají, a tak tráví advent raději vymýšlením čísel. Ňouma si vymyslel číslo $x \in (-2, 2)$, vybral si ho náhodně s rovnoměrně rozdělenou pravděpodobností. Kouma si vymyslel číslo $y \in (-2, 2)$ také rovnoměrně a navíc nezávisle na Ňoumovi. Určete pravděpodobnost, že pro jejich čísla platí

$$(y^2 + x^2 - 2|x|)(y^2 + x^2 - 2|y|) > 0.$$

Úloha 4.5.

Henry se rozhodl, že obarví přirozená čísla od jedničky do desítky žlutě, hnědě a červeně. Přitom součet žlutého a hnědého musí být vždy hnědý, součet žlutého a červeného červený a součet červeného a hnědého žlutý. Dále součin žlutého a hnědého je žlutý, součin **žlutého a červeného** také a součin hnědého s červeným je červený. Navíc šestka je žlutá a čtyřka má jinou barvu než devítka. Kolika způsoby se mu to mohlo podařit?

Úloha 4.6.

Matěj našel nejdelší posloupnost po sobě jdoucích čísel takovou, že každé lze zapsat jako součet čtverců dvou přirozených čísel. Když se to dozvěděla Liběnka, hned našla nejdelší posloupnost po sobě jdoucích čísel, která lze zapsat jako rozdíl čtverců. Která z posloupností byla delší?

Úloha 4.7.

Když se Henry dozvěděl, že vyšel další díl jeho oblíbené knihy *Stopařův průvodce světem reálných funkcí*, rozhodl se, že si ho musí koupit. Hned na první straně narazil na následující úlohu:

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (tj. takové, jež jsou definovány pouze pro kladná čísla a vracejí pouze kladné hodnoty), pro které platí

$$f(x + y) = f(y \cdot f(x)) \cdot f(x),$$

kde x, y jsou libovolná kladná reálná čísla.

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://bart.math.muni.cz/~brkos`.