Zadání 3. série - oprava

Nerovnosti

Termín odeslání: 11. ledna 2010

Úloha 3.1.

Velice zajímavý je model vzdělávání v Lenošíně a Hloupětíně. Mají zde několik stupňů (pater) škol. Zajímavostí je, že všechny stupně škol bývají v jedné budově. Rozlišují školky, někdy označované zkratkou MŠ (Matematická školka), dále pak nižší školy, vyšší školy a vysoké školy (rozlišeno nejen podle úrovně probírané látky, ale i podle pater, ve kterých se vyučuje). Co je však pro lenošínské a hloupětínské školy typické je to, že si studenti mohou vybrat v jakém pořadí jednotlivé úrovně škol absolvují. Mohou tedy nejprve na vysokou školu a až posléze absolvovat školku. Abyste měli alespoň trochu přehled o úrovni školky, uveďme si jeden z příkladů, který zde studenti řešili:

Dokažte, že

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Úloha 3.2.

V minulosti si dokonce studenti mohli vybírat, který den do jaké třídy půjdou. Bohužel však docházelo k tomu, že si vždy vybírali třídy, kterým ten den něco odpadlo a tak tyto třídy praskaly ve švech a ostatní naopak zely prázdnotou. Ne že by se v nich neučilo. Mělo to samozřejmě i své výhody. V těchto třídách bylo nejméně zapomenutých domácích úkolů, nejméně prohřešků a dalo by se najít spousta dalších výhod. Bohužel však také spousta příkladů, které během hodiny byly zadány k promyšlení, rozmyšleno nebylo. Vniveč přišel i tento příklad:

Pro $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Úloha 3.3.

Také skladba předmětů na tamních školách nám určitě neunikne bez povšimnutí. Předměty jsou zde vyučovány bez výjimky ve spojitosti s matematikou. Například tuhle v matematické biologii se počítala závislost počtu obratlů bezobratlích na počtu obratlovců bez obratlů. Také se zde mimo jiné dokazovala tato nerovnost:

Najděte největší S takové, že pro kladná a, b, c, d platí nerovnost

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + \\ + \frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d+}{c} + \frac{a+b+c}{d} \geq S.$$

BRKOS Team 2009

Úloha 3.4.

Převážnou většinu předmětů v Lenošíně pak tvořily různé formy lenošení, odpočinku či relaxace. Téměř do dokonalosti zde vyvinuli učení ve spánku. Jedním z takzvaných spánkopříkladů byl tento:

Nechť $a, b, c \geq 0$. Dokažte

$$\frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Úloha 3.5.

Když už opravdu není co dělat, sednou Kouma s Ňoumou k počítači a zahrají si spolu nějakou tu hru. Zrovna tuhle hráli hru, ve které potřebovali přepravit početnou armádu čítající tři humány, jednoho dospělého monkeje a dva malé monkeje přepravit z jedné strany řeky na druhou, přičemž měli k dispozici jeden člun, který uveze pouze dvě postavy. Navíc pouze dospělý monkej a humáni jsou schopni řídit člun. Pokud by však na některém z břehů bylo v jeden moment více monkejů než humánů, potom by monkejové humány pobili. Kolikrát nejméně musel jet člun z jedné strany řeky na druhou, aby se všichni dostali živí na druhý břeh?

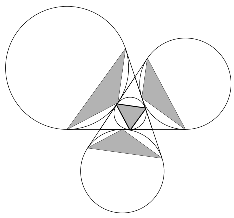
Úloha 3.6.

Liběnka dostala k svátku od Matěje knížku plnou matematických příkladů. Než ji však stačila otevřít, zabavil ji Henry a už nahlas četl první příklad:

Kolik existuje podmnožin množiny $1, \ldots, 2009$ *takových, že součet prvků podmnožiny dává zbytek* 2010 *po dělení* 2048*? Dokázali byste to také určit?*

Úloha 3.7.

Liběnka si dárek jen tak vzít nenechala. Jakmile Henry dočetl zadání prvního příkladu, knížku mu nesmlouvavě zabavila. Nenechala Matěje ani dopočítat Henrym zadaný příklad a diktovala mu nový. A tak Matěj opět trávil odpoledne matematikou:



Uvažme trojúhelník ABC, kružnici vepsanou ABC a všechny kružnice tomuto trojúhelníku připsané. Dokažte, že převrácená hodnota obsahu trojúhelníka ***s vrcholy v bodech dotyku vepsané kružnice trojúhelníka*** *ABC je rovna součtu převrácených hodnot obsahů trojúhelníků s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných a přímek AB, BC a AC.*

Svá řešení posílejte na adresu:
BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:
`http://bart.math.muni.cz/~brkos`.

BRKOS Team 2009