Zadání 2. série

PRVOČÍSLA

Termín odeslání: 23. listopadu 2009

Úloha 2.1.

Zatímco se Hloupětín ekonomicky rozvíjel, Lenošín za ním jednoznačně zaostával. Lenošínští si uvědomili, že vydělávat čistě lenošením není to pravé ořechové. Obzvláště když Hloupětín zrekonstruoval za peníze utržené vyřešením jednoho záludného příkladu celé náměstí, bylo jasné, že právě Hloupětín se vydal tou správnou cestou. A jaký že byl ten záludný příklad? Podařilo se jim najít všechna přirozená čísla n taková, že $n^5 + n^4 + 1$ je prvočíslo.

Úloha 2.2.

Lenošínským bylo jasné, že s touto situací musí něco dělat. A tak se pokusili také řešit příklady na zakázku. Tehdy to vzbudilo v obou městech velký povyk. Hloupětínští obviňovali lenošínské, že prachsprostě „obšlehli“ jejich systém. Lenošínští tvrdili, že se nechali pouze inspirovat. Ať to bylo tak, či onak, jejich první pokus skončil fiaskem. Nedokázali si totiž poradit hned s prvním příkladem:

Nechť $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$, kde $p_1, \ldots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $e_1, \ldots, e_k$ jsou přirozená čísla. Určete, kolik existuje dvojic přirozených čísel takových, že jejich nejmenší společný násobek je n.

Úloha 2.3.

Protože příklad nevyřešili, sklopili hlavu a běželi s příkladem za hloupětínskými. Ti si s ním samozřejmě hravě poradili. A to byl první náznak vzájemné spolupráce. Hloupětínští totiž nestíhali vymýšlet příklady do svých kaucí a lenošínští naopak při lenošení kromě lelkování neměli co na práci, a tak začali vymýšlet příklady. Nejprve spolupráce probíhala pouze po jednotlivých příkladech. Stejně tomu tak bylo i u příkladu:

Najděte všechna prvočíselná řešení rovnice $x^2 + y^3 = z^4$.

Úloha 2.4.

Posléze však došlo k tak úzké spolupráci, že i lenošínští začali výrazně prosperovat. A tímto způsobem šlape jejich ekonomika dodnes. Obě města tak zdárně prosperují. Zrovna nedávno vydělali společně balík peněz za tento příklad:

Řetězce $2, 3, 7, 13$ *či* $2, 5, 11, 23, 47$ *jsou příklady řetězců prvočísel, ve kterých* $p_i = 2p_i + 1$ *nebo* $p_i = 2p_i - 1$. *Dokažte, že každý takový řetězec je konečný.*

Úloha 2.5.

Když Matěj s Čudlou usínali spolu ve stanu na své první společné dovolené, povídali si, co se jim ten den líbilo a co nelíbilo. Oba se, což snad nikoho ani nepřekvapí, shodli, že nejvíce se jim na uplynulém dni líbila rovnice, ve které měli určit všechna reálná čísla x taková, že $\sqrt{[-7x^2+3x+4]} = [2-\sin x]$, kde $[a]$ značí celou část čísla a.

Úloha 2.6.

Kouma Ňoumálek chtěl překvapit Ňoumu Koumálka nějakým zákeřným příkladem. Stále však nemohl na nic přijít, až jednou ho napadlo:

Tětivou pohybujeme po obvodu půlkruhu určeného průměrem d. *Dokažte, že trojúhelník tvořený středem tětivy a kolmými průměty krajních bodů tětivy na průměr* d *je rovnoramenný a že všechny trojúhelníky vzniklé pohybem tětivy jsou podobné.*

Úloha 2.7.

Liběnka si nechala jednoho letního večera povídat od Henryho o tom, jaké to bylo, když ještě nebyla téměř žádná výpočetní technika. Henry barvitě vyprávěl a uvedl, že dokonce bez užití výpočetní techniky dokázali určit celou část čísla

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

Povedlo by se vám to také?

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
602 00 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

`http://bart.math.muni.cz/~brkos`.

BRKOS Team 2009