Zadání 1. série

Šachovnice

Termín odeslání: 26. října 2009

Úloha 1.1.

Když ještě za dávných časů byly Hloupětín a Lenošín jedno souměstí, sešli se radní, aby dohodli, jakým směrem se bude ubírat ekonomika tohoto města. A právě toto shromáždění se datuje jako první krok k osamostatnění Lenošína (jak říkají lenošínští, hloupětínští naopak tvrdí, že se osamostatnil Hloupětín). Tehdy totiž lenošínští navrhovali, že konurbace bude vydělávat lenošením. Hloupětínští oproti tomu chtěli vydělávat prodejem zajímavých příkladů, případně řešením zaslaných příkladů. Ačkoliv oba návrhy možného přísunu financí do městské pokladny byly jistě dírou v trhu, dohodnout se nedokázali. Z této schůze pochází také úloha uvedená jako jeden z příkladů k prodeji, kterou zde nadhodil praprapraděd praprapraděda Henryho Klevra:

Šachovnice je klasicky obarvena. V jednom tahu změníme barvy všech políček v jednom sloupci nebo v jednom řádku. Může na konci zůstat pouze jedno políčko černé?

Co myslíte, koupil by tento příklad někdo?

Úloha 1.2.

Hádka na zmiňovaném shromáždění přerostla v bouřlivé pouliční nepokoje. Lenošínští na jedné straně ulice leželi na lenoškách, hloupětínští na druhé straně ulice seděli a řešili příklady. Jedna z těchto úloh se nám z té hrůzostrašné chvíle dochovala:

Na šachovnici je označených 16 *polí tak, že v každém řádku i sloupci jsou označena dvě pole. Dokažte, že na označených* 16 *polí lze umístit* 8 *bílých a* 8 *černých figurek tak, aby v každém řádku a každém sloupci byla právě jedna bílá a právě jedna černá figurka.*

Úloha 1.3.

Demonstranti byli nakonec rozehnáni tmou a nočním chladem a jen zázrakem se tehdy nikdo nezranil. O to horší však byla dohra. O den později se opět sešla rada města, aby projednala možná řešení této krize. A tak bylo dne 15.6. v 17 hodin 32 minut 16 sekund bohužel neznámého roku za hlasitého lenošení na jedné straně a nepřeslechnutelného ohlodávání tužek na straně druhé rozhodnuto o oddělení obou částí souměstí. V Lenošíně toto oslavili převalením na druhý bok, v hloupětíně vyvěšením příkladu:

Do šachovnice $n \times n$ je vepsáno n^2 čísel tak, že jejich součet je nezáporný. Dokažte, že můžeme přemístit sloupce šachovnice tak, aby součet čísel na jedné z diagonál byl také nezáporný.

BRKOS Team 2009

Úloha 1.4.

A tak se město Lenošín pokusilo vydělávat lenošením. Bezúspěšně. To naopak Hloupětínu se dařilo. Hned první příklad, který byl na aukci vydražen a přinesl do městské pokladny nemalý finanční obnos, zní:

Pole šachovnici 12×12 *jsou obarvena jednou ze tří barev. Dokažte, že existuje pravoúhelník, jehož rohová políčka jsou stejné barvy.*

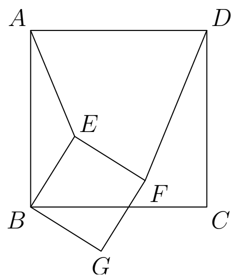
A tak vznikla samostatná města Hloupětín a Lenošín.

Úloha 1.5.

Kouma s Ňoumou napsali po obvodu kružnice čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Poté v každém kroku přičítali k libovolným dvěma sousedním číslům totéž přirozené číslo. Mohli takto dostat všechna čísla stejná?

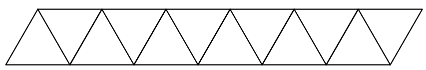
Úloha 1.6.

Když Matěj s Liběnkou malovali svůj pokojík, složili si k tomu samozřejmě večerníkovské čepice. Složili je z různých čtvercových papírů. Po malování čepice opět rozložili a papíry hodili přes sebe právě tak, že vrchol jednoho čtverce splýval s vrcholem čtverce druhého. Tu Matěje napadlo, že pokud vrcholy čtverců označí tak, jak je na obrázku, a vzdálenost AE označí a a vzdálenost DF označí x, pak platí, že $x = a \cdot \sqrt{2}$. Podařilo by se vám to dokázat?



Úloha 1.7.

Henry Klevr si hrál s kosodelníkovým proužkem papíru tak, že ho překládal sem a tam, až vznikl pás sestávající se z dvanácti rovnostranných trojúhelníků. Každý z vrcholů obarvil žlutě nebo červeně. Přišli Matěj s Liběnkou a napadlo je, kolik existuje takových obarvení, aby žádný z rovnostranných trojúhelníků neměl všechny vrcholy stejné barvy? Dokázali byste to určit?



Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
602 00 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

`http://bart.math.muni.cz/~brkos`.

BRKOS Team 2009