Zadání 6. série

Hrátky Koumy a Ňoumy

Termín odeslání: 20. dubna 2009

Úloha 6.1.

Kouma s Ňoumou si uspořádali Celonárodní mistrovství Lenošína s otevřeným vstupem pro Hloupětínské. Natiskli si pozvánky, nakoupili ceny, poháry pro vítěze i všechny zúčastněné, natiskli diplomy a pak se konečně zavřeli do pokoje a mistrovství začalo.

První disciplínou bylo *dělitelování.* Ňouma začal s číslem $n = 2$. V každém následujícím kroku získá jeden z hráčů číslo n tak, že k němu přičte vlastního dělitele[1] čísla n. Vyhraje ten, který první dostane číslo větší než 2009. Kdo vyhraje?

Úloha 6.2.

No hádejte, kdo vyhrál první disciplínu? No jasně. Druhá bitva vypukla na poli ryze černém a zbraní byla pouze křída. Ňouma, jenž opět začíná, s Koumou střídavě psali na tabuli přirozená čísla menší nebo rovna přirozenému číslu n, přičemž na tabuli nesměli napsat dělitele žádného čísla již na tabuli napsaného. Prohrál ten, kdo už nemohl napsat žádné číslo. Kdo vyhrál?

Úloha 6.3.

Další disciplínou byl *Čokoládový výslech.*
Kouma si myslí přirozené číslo od 1 do 16. Ňoumovi slíbil čokoládu, pokud ho uhádne. Ňouma se smí Koumy n-krát zeptat, jestli číslo patří do nějaké množiny. Kouma mu musí vždy odpovědět, může ale jednou lhát. Když po n-té odpovědi Ňouma číslo uhádne, vyhrál. Pro jaká n je jisté, že Ňouma vyhraje?

Úloha 6.4.

Poslední dvě klání proběhla v *polynomování.* Medaile se rozdávaly v celočíselném polynomování i reálném polynomování. Nejprve tedy spolu soupeřili Ňouma (začínající hráč) s Koumou v celočíselném boji.

a) Střídavě doplňovali celočíselné koeficienty normovaného polynomu $x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots$. Dokažte, že Ňouma může hrát vždy tak, aby polynom měl pouze celočíselné kořeny.

O něco tužší souboj se uskutečnil na poli reálném:

b) Ňouma s Koumou opět střídavě doplňovali koeficienty polynomu $x^{10} + \dots x^2 + \dots x + 1$, tentokrát však již mohli být tyto koeficienty libovolné reálné. Pokud polynom nebude mít žádné reálné kořeny, vyhraje Ňouma. Dokažte, že Kouma může vyhrát, ať už udělá Ňouma cokoliv.

[1] Vlastní dělitel čísla n je každý dělitel menší než n (včetně jedničky).

Úloha 6.5.

Matěj s Bublou se vydali na noční procházku a ruku v ruce pozorovali hvězdy na jasné jarní noční obloze. V tuto romantickou chvíli dodal této kouzelné atmosféře pověstnou třešničku Matěj, když láskyplně pošeptal Buble do ouška: „Vidím na obloze n hvězd (obloha je prostorová) a určitě žádné 4 hvězdy neleží v jedné rovině. Některé z nich spojíme k úsečkami. Lásko má, zvládla bys dokázat, že pokud těmito úsečkami není vytvořený trojúhelník s vrcholy v některé z hvězd, potom k je menší nebo rovno dolní celé části ze čtvrtiny druhé mocniny čísla n?“ No uznejte, není Matěj úžasný?

Úloha 6.6.

Bubla, celá rozechvělá, chtěla Matěje také potěšit a pošeptala mu: „Čtveřice hvězd leží v rovině a tvoří čtverec $ABCD$, jemuž je vepsaný rovnostranný osmiúhelník $O_1O_2\dots O_8$ (tedy takový, že pro i od 1 do 7 platí $|O_iO_{i+1}| = |O_8O_1|$). Některé jeho strany navíc leží na straně čtverce a to tak, že úsečka O_1O_2 leží na AB, O_3O_4 na BC, O_5O_6 na CD a O_7O_8 na DA. Matěji, uměl bys dokázat, že existuje čtverec, na kterém leží zbylé strany osmiúhelníka?“

Úloha 6.7.

Zatímco Matěj s Bublou prožívali nádherné romantické chvilky pod hvězdami, trápila se Liběnka s jedním příkladem. A nemohla a nemohla ho vyřešit. No, schválně, dokázali byste to vy? Posloupnost a_n je definována jako $\sum_{d|n} a_d = 2^n$. Dokažte, že $n \mid a_n$.

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo na e-mail:

brkos@math.muni.cz.