Zadání 5. série

Geometrie

Termín odeslání: 16. března 2009

Úloha 5.1.

Kouma s Ňoumou pořádali mravenčí závody. Dali k sobě dvě krabičky od sirek tak, že svíraly ostrý úhel. Uvnitř úhlu vytvořeného stěnami krabiček je start závodu. Ze startu musí vyrazit mravenci přímo ke stěně první krabičky, dotknout se ji pravou prostřední nožičkou, odtud běžet ke stěně druhé krabičky, dotknout se levou prostřední nožičkou a běžet zpátky na start, kde je zároveň i cíl. Kudy má běžet Koumův mravenec, aby ho bolely co nejméně nožičky (tedy aby urazil co nejmenší vzdálenost)?

Úloha 5.2.

Matěj Klevr pozval na rande sličnou slečnu Bublu Čudlovou. Liběnka se rozhodla, že si ji musí prověřit, a při první příležitosti jí položila otázku: „Bublo, co bys mohla říci o přímkách a, b, pokud platí, že složíme-li osovou symetrii podle přímky a s osouvou symetrií podle přímky b a osovou symetrii podle přímky a, dostaneme totéž zobrazení, jako bychom složili osovou souměrnost podle přímky b s osovou souměrností podle přímky a a s osovou symetrií podle přímky b? Jaký úhel svírají přímky a a b?“

Úloha 5.3.

„Neruš mé trojúhelníky!“, ozvalo se Koumovo zahřmění směrem k Ňoumovi. Kouma měl nakreslené dva rovnostranné trojúhelníky ABC a KLM (se shodnou orientací) s odlišnou délkou stran. A Ňouma chodil a vymýšlel ptákoviny. Kouma už to nemohl vydržet a povídá mu: „Kdybys radši přestal blbnout a místo toho dokázal, že středy stran AK, BL a CM tvoří také rovnostranný trojúhelník.“

Úloha 5.4.

Bublu Čudlovou otázka na osovou souměrnost vůbec nezaskočila a po chvíli přemýšlení přišla na správné řešení. Liběnku to překvapilo. Aby toho nebylo málo, tak ji hned vzápětí srazila do kolen otázka, zda by dokázala určit, na co se zobrazí přímka v zobrazení f, které je bijekcí roviny na sebe a ve kterém se zobrazí libovolná kružnice opět na kružnici.

Úloha 5.5.

Poté, co ani na popáté nevyhráli Kouma s Ňoumou ve sportce, rozhodli se, že si pro sebe vymyslí hazardní hru se zaručenou výhrou. Nazvali ji Šťastných $2n+1$. Z přirozených čísel 1 až $2n+1$ se losuje $2n+1$ čísel tak, že žadné číslo nemůže být vylosováno dvakrát. Vyhraje ten, který uhodne všech $2n+1$ tažených čísel. Kouma hned v první hře překvapivě vyhrál hlavní cenu i s prémií. Když už tuto hru hráli poněkolikáté, všiml si Ňouma zajímavé skutečnosti, totiž že součin všech rozdílů taženého čísla a pořadí, ve kterém bylo číslo taženo, byl po každé hře dělitelný dvěma. Je to jen náhoda?

Úloha 5.6.

Když Matěj zjistil, jak zkoušela Liběnka jeho lásku, byl tak naštvaný, že by se to s trochou nadsázky (a to nepřeháním) již dalo nazvati příliš naštvaný. Aby si ho Liběnka udobřila, vymyslela mu příklad. Měl dokázat, že rovnice

$$\left(x+y\sqrt{5}\right)^4+\left(z+t\sqrt{5}\right)^4=2+\sqrt{5}$$

nemá řešení pro žádná racionální čísla x, y, z, t. Matěj samozřejmě takovou omluvu přijal...

Úloha 5.7.

Roman Tyčka Bubla a Matěj vyrazili společně do kina. V Lenošíně promítají před vlastním filmem (místo ukázek, co bude již brzy ve vašem kině) zadání příkladů, aby si matematici, které zrovna nebaví film vybraný jejich partnerkami, kino také náležitě užili. A tak před filmem, na který vyrazili naši kamarádi, běžel tento příklad:

„Nechť a, b jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2+px-1=0$, kde p je liché celé číslo. Nechť $z_n=a^n+b^n$. Dokažte, že z_n a z_{n+1} jsou nesoudělná celá čísla pro všechna přirozená čísla n.“

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno

nebo na e-mail:

brkos@math.muni.cz.

BRKOS Team 2008