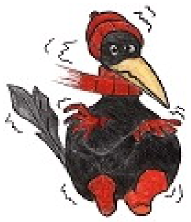
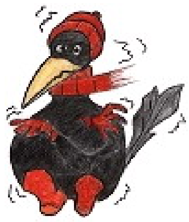


Zadání 2. série

Dirichletův princip

Termín odeslání: 24. listopadu 2008



Úloha 2.1.

To jednoho dne přišel Matěj ze školy a už od dveří hulákal na Liběnku, že našel zajímavou čtveřici celých čísel a, b, c, d takovou, že součin rozdílů $b - a$, $c - a$, $d - a$, $c - b$, $d - b$ a $d - c$ je dělitelný dvanácti. A prý jestli také takovou najde. Liběnka se po chvíli začala smát a odvětila Matějovi, že tuto vlastnost má přeci libovolná čtveřice celých čísel. Podařilo by se vám to dokázat?

Úloha 2.2.

Firma Hlou-zátko (Hloupětínské lízátko) vyhlásila soutěž, kdo během prázdnin nasbírá největší počet tyček od lízátek. Každé z n dětí, které se soutěže účastnilo (mezi nimi i velcí lízalové Kouma s Ňoumou), nasbíralo počet tyček od lízátek, který nebyl dělitelný n. Dokažte, že ze soutěžících dětí lze vybrat skupinu takovou, že počet tyček od lízátek, které nasbírala dohromady tato skupina bude již n dělitelný.

Úloha 2.3.

To se jednou Kouma s Ňoumou pěkně pohádali. Kouma tvrdil, že přirozená čísla 1...100 můžeme rozdělit do 12 geometrických posloupností. Ňouma si však myslel opak. Který z kamarádů má pravdu?

Úloha 2.4.

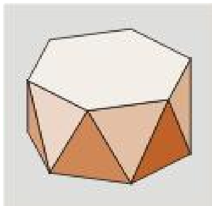
Matěj s Liběnkou napsali na papír čísla od 1 do 2008 v úplně náhodném pořadí. Matěj se na ně podívá a říká: „Je zajímavé, že žádných 224 čísel nejde obarvit zeleně tak, aby zelená posloupnost byla rostoucí“. Liběnka povídá: „Mě přijde zajímavější, že žádných 10 nejde obarvit tak, aby výsledná posloupnost byla klesající.“ A z kuchyně se ozval Henry: „Nevím, v jakém pořadí jsou ta čísla napsána, ale jeden z vás určitě nemá pravdu.“ Jak to mohl Henry vědět?

Úloha 2.5.

Kouma napsal na tabuli čísla 13 a 19 a povídá Ňoumovi, že v jednom kroku může smazat jedno z čísel a nahradit ho součtem smazaného a druhého čísla. Mohl takto Ňouma po konečně mnoha krocích dostat na tabuli číslo 2008?

Úloha 2.6.
Již dlouho trápil Matěje jeden příklad, ale to mu hrdost nedovolila, aby se šel poradit za Liběnkou, či dokonce za Henrym. Liběnka však nalezla v pokojíčku čmáranice s výpočty a zadání si lehce odvodila a dokonce i příklad vyřešila. Když se potom jednou Matěj vrátil z venku vybafla na něj: „Tak už je všechny mám!“ Matěj nechápal a Liběnka s radostí Matějovi ukázala, že našla všechna přirozená čísla n taková, že $n+d(n)+d(d(n)) = 2008$, kde $d(n)$ značí ciferný součet čísla n. Matěj jen zalapal po dechu. Dokázali byste vyřešit i tento příklad jako Liběnka?

Úloha 2.7.
V Hloupětíně stavěli novou knihovnu, která měla, jak už tak knihovny mívají, podivuhodný tvar, kterému se odborně říká šestiúhelníková antiprisma (jinak také hranolec), kterou si můžeme představit takto:



Máme v prostoru dva shodné pravidelné šestiúhelníky takové, že přímka spojující jejich středy je kolmá k rovinám, ve kterých šestiúhelníky leží. Navíc platí, že tyto šestiúhelníky jsou vůči sobě pootočeny tak, aby měly společnou rovinu symetrie a přitom jejich vrcholy neurčovaly hranol. A aby toho nebylo málo, když pospojujeme vrcholy jednoho s vrcholy druhého, dostaneme těleso, které má kromě dvou šestiúhelníkových stěn 12 stěn ve tvaru rovnoramenných trojúhelníků. Výšku knihovny označme v, plochu podstavy S, průřez polovině výšky P. Ukažte, že pro objem knihovny V platí $V = \frac{v(S+2P)}{3}$.

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno