Zadání 1. série

Posloupnosti

Termín odeslání: 27. října 2008

Úloha 1.1.

V Hloupětíně postavili novou továrnu na lentilky. Když začínali s výrobou, vyrobili první den 4 krabičky lentilek, druhý den 44 krabiček lentilek, třetí den 444 krabiček lentilek a takto narůstala produkce každým dnem. Kolik krabiček lentilek měli vyrobených po n dnech od spuštění továrny?

Úloha 1.2.

Liběnka obarvovala přirozená čísla od 1 do 9 zelenou a modrou barvou. Matěj ji povídá: „Schválně, jestli je obarvíš tak, aby žádná tři čísla stejné barvy netvořila aritmetickou posloupnost.“ Mohlo se to Liběnce podařit?

Úloha 1.3.

V Lenošíně již tradičně probíhá soutěž Šikuly Chytrolína, pojmenovaná po jednom z nejvýznamnějších lenošínských matematiků. V prvním kole se objevil tento příklad:

Dokažte, že každý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, je přirozené číslo.

Kouma s Ňoumou se této soutěže samozřejmě zúčastili a tento příklad hravě vyřešili. Když si pak o svých řešeních povídali, zeptal se Kouma Ňoumy, jestli by dokázal určit všechna n, pro která je člen a_n dělitelný třemi. Dokázali byste vyřešit příklad z lenošínské soutěže i odpovědět na Koumovu otázku?

Úloha 1.4.

Henry Klevr se jednoho dne obořil na své děti, že jsou strašlivě zlobivé. Matěj s Liběnkou mu však odvětili, že je zajímavé, že má tolik zlobivých dětí, jako je prvočísel v posloupnosti $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$. Henryho tato úvaha zaujala a pěkně se nasmál, když ji vyřešil. Kolik má Henry podle Matěje s Liběnkou zlobivých dětí?

Úloha 1.5.

Kouma s Ňoumou si v bazénu házeli dvoubarevným míčem. Nebyl to ale obyčejný míč – jeho obarvení bylo tak zvláštní, že o něm šlo s jistotou říct pouze to, že každý bod na povrchu míče je buď zelený, nebo modrý. Okolní plavci neměli pro jejich hrátky pochopení, a proto jim plavčík míč zabavil. Když si ho šli při odchodu Kouma s Ňoumou k plavčíkovi vyzvednout, řekl, že jim ho vrátí, až dokážou, že mohou na míči vybrat tři body stejné barvy tak, aby tvořily vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

Úloha 1.6.
Když ráno Matěj s Liběnkou vstávali, našli na stole od Henryho vzkaz, že mohou jít ven, až se jim podaří vynulovat celá tabulka o m řádcích a n sloupcích, ve které je v každém políčku napsané nějaké přirozené číslo. V jednom kroku přitom mohou buď vynásobit všechna čísla ležící v jednom řádku dvěma, nebo odečíst jedničku od všech čísel ležících v jednom sloupci. Může se to Matějovi a Liběnce podařit po konečně mnoha krocích?

Úloha 1.7.
Matěj s Liběnkou Henryho příklad po chvíli rozluštili a na druhou stranu papíru mu napsali, že si může sednout k novinám, až dokáže, že je-li rozdíl třetích mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel druhou mocninou přirozeného čísla y, pak je toto číslo y součtem druhých mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Zvládli byste to také?

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno