Zadání 6. série

Termín odeslání: 5. května 2008

Úloha 6.1

Konečně v Hloupětíně roztál všechen sníh a Kouma s Ňoumou se vydali na první jarní výlet na hrad Ftipín. U vstupu do hradu našli tento nápis: "Ten, kdo středověký problém rozluštit dokáže, zadarmo na náš hrad Ftipín vstoupit může." Pod tímto nápisem bylo zadání příkladu: "Dokažte, že pokud pro celá čísla a, b, c, d platí $(a-c)|(ab+cd)$, pak $(a-c)|(ad+bc)$."

Úloha 6.2

To Matěj s Liběnkou se vydali do nového lanáče, co vyrostl v Lenošíně. Nejvíce se jim líbila jedna zapeklitá překážka. V kovovém rámu, který měl tvar konvexního n-úhelníku, bylo mezi vrcholy nataženo několik lan tak, že se žádná dvě nekřížila. Když se Matěj s Liběnkou na této překážce dostatečně vyblbnuli, napadl je zajímavý příklad. Zajímalo je, kolik nejvíce lan lze napnout mezi vrcholy rámu tak, aby se žádná dvě nekřížila. Dokažte, že je to nejvýše $n-3$ a že trojúhelníkových oblastí vytvořených lany je v tomto případě $n-2$.

Úloha 6.3

V Hloupětíně a Lenošíně volí parlament společného prezidenta podobným systémem jako u nás. Rozdíl je v tom, že jedna komora parlamentu zasedá v Hloupětíně a druhá v Lenošíně, přičemž každý z konečně mnoha zákonodárců si může vybrat, ve které komoře bude zasedat. Navíc, na rozdíl od našeho parlamentu, každý zákonodárce má mezi ostatními zákonodárci právě tři nepřátele, přičemž nepřátelství je vždy oboustranné. Ukažte, že parlament bude moci při volbě zasedat takovým způsobem, že každý zákonodárce bude mít ve své komoře nejvýše jednoho nepřítele.

Úloha 6.4

Hrad Ftipín vlastnil v 15. století rod Ftipálků z Ftipálkova. Roku 1468 však ve vodním příkopě před hradem tragicky utonul jediný dědic hradu. Rodiče onoho nešťastníka tedy stáli před otázkou, komu hrad po jejich smrti připadne. Mnoho rodů ze širokého okolí mělo o tento skvost zájem. Byla tedy vypsána soutěž. Hrad získá ten rod, který nalezte všechny takové množiny čtyř reálných čísel, že součet libovolného čísla z hledané množiny se součinem zbylých tří čísel je roven 2. Dokázal by se i tvůj rod ucházet o hrad?

Úloha 6.5

Když se Matěj s Liběnkou vraceli domů, říkali si, že již dlouho nevymysleli pro Henryho nějaký pěkný příklad. Matěj navrhl, že by ho mohli nechat vyřešit nějakou zajímavou nerovnici. Liběnka pak dodala, že jednu by měl určitě hned vyřešenou, a že tedy musí vymyslet nějakou soustavu. A tak Matěj s Liběnkou střídavě psali jednu nerovnici za druhou a než přišli domů, vznikla z toho tato soustava 100 rovnic o 300 neznámých:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &\geq 0 \\ a_2x_4 + a_3x_5 + a_4x_6 &\geq 0 \\ &\vdots \\ a_{99}x_{295} + a_{100}x_{296} + a_1x_{297} &\geq 0 \\ a_{100}x_{298} + a_1x_{299} + a_2x_{300} &\geq 0. \end{aligned}$$

Henrymu prozradili, že tato soustava má řešení: $(1, -3, 2, 1, -3, 2, ..., 1, -3, 2)$. Henry měl dokázat, že pak $a_1 = a_2 = ... = a_{100}$. Dokázali byste to také?

Úloha 6.6

Osmé nádvoří hradu Ftipín má tvar trojúhelníku, jehož délky vyjádřené v hloupětínských mílích jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla. Jeden z vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku má dvojnásobnou velikost než jiný vnitřní úhel. Dokázali byste najít všechny možnosti, jak mohlo nádvoří přesně vypadat?

Úloha 6.7

Henry se pořádně napočítal při řešení úlohy, kterou mu zadaly jeho děti. A aby jim nezůstal nic dlužen, poprosil je, zda-li by dokázaly určit ciferný součet čísla, které je ciferným součtem ciferného součtu čísla 4444^{4444}. Henry jim dovolil, aby pracovaly pouze v desítkové soustavě, ale pokud by náhodou přišly na něco zajímavého i v jiné číselné soustavě (například pětkové), jistě by je neminula odměna v podobě bodů navíc do jisté matematické soutěže. Dokázali byste jim pomoci?

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno