Zadání 5. série

Termín odeslání: 31. března 2008

Úloha 5.1

Jednou navečer zase vyprávěl Henry svým dětem pohádku. Tentokrát o Sněhurce. A to by nebyl Henry, aby do toho nezamontoval nějaký pěkný příklad... Totiž, když trpaslíci odešli ráno do práce, zůstala Sněhurka v chaloupce sama. Aby se nenudila, ušila trpaslíkům nové čepice. Protože neměla dostatek látky jedné barvy, čepičky pro Štístka, Kýchala, Prófu, Rýpala, Bručouna, Stydlína a Šmudlu byly dvou barev. Když se trpaslíci vrátili domů, byli nadšením celí bez sebe. Vždyť ty jejich staré čepice už byly celé odrané. A tak si trpaslíci čepice rozebrali a zasedli ke stolu. Ten měl tvar pravidelného sedmiúhelníku a židličky byly umístěné tak, že trpaslíci seděli právě ve vrcholech sedmiúhelníku. No a hádejte, co dal Henry dětem za úkol? Měly dokázat, že existuje takový rovnoramenný trojúhelník s vrcholy ve vrcholech stolu, že v jeho vrcholech sedí trpaslíci s čepičkou stejné barvy....

Matěj s Liběnkou už ani nevnímali, jak pohádka pokračovala dále, a přemýšleli, jak vyřešit Henryho úkol. Zvládli byste to také?

Úloha 5.2

Když Kouma shrnoval sníh před Ňoumálkovic domečkem, všiml si, že stromy v jejich zahradě tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku. A tak začal pobíhat s hrabákem na sníh a "rýsovat" s ním do sněhu různé obrazce. Když ho uviděl Ňouma, začal se mu hlasitě posmívat. Kouma ho však zastavil: "Podívej, tady ve sněhu jsem vyznačil konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Úhlopříčky v tomto čtyřúhelníku jsou na sebe kolmé. Zde jsem vyznačil body M, N, R, S, které jsou postupně středy stran AB, BC, CD, AD. Dále zde máme body W, X, Y, Z, což jsou paty kolmic vedené z bodů M, N, R, S na strany CD, AD, AB, BC. Tak mi teď posměváčku dokaž, že vyznačené body M, N, R, S, W, X, Y, Z leží na jedné kružnici."

Pomozte Ňoumovi s touto úlohou.

Úloha 5.3

Když se to Ňoumovi podařilo dokázat, šli se s Koumou zahřát dovnitř. Chtěli si zahrát dámu, jenže v tom nepořádku v Koumově pokojíku se jim nepodařilo najít figurky. A tak seděli nad prázdnou šachovnici, když v tom Ňoumu napadl zajímavý příklad. A protože se chtěl Koumovi pomstít za ten jeho, okamžitě mu ho začal diktovat: "Podívej, Koumo, rozdělím tuto šachovnicí na p disjunktních obdelníků (strany těchto obdélníků se mohou skládat pouze ze stran čtverců šachovnice) tak, že v každém obdélníku bude stejný počet bílých a černých polí a každý obdélník bude obsahovat různý počet polí. Dokážeš nalézt největší takové p a pro toto p určit všechny možné obsahy obdélníků?"

Kouma se pěkně zapotil, než na to přišel. Pokuste se o to také.

Úloha 5.4

Matěj s Liběnkou hráli zajímavou hru. Střídavě doplňovali koeficienty do soustavy rovnic s neznámými x, y, z:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

Matěj začínal. V případě, že nakonec soustava měla nějaké nenulové řešení, vyhrál Matěj. V opačném případě vyhrála Liběnka.

Dokažte, že pro Matěje existuje vyhrávající strategie, a popište ji.

Úloha 5.5

Když Henry viděl, jakou zajímavou hru jeho děti hrají, přišel k nim a pozoroval je a kibicoval. Matěj s Liběnkou ho však odehnali se slovy, že se může dívat, až jim na čtverečkovaném papíře vyznačí tři průsečíky čar, které tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Henry souhlasil a začal nad tímto příkladem přemýšlet.

Dokažte, že se Henry již k dětem nevrátil, tedy že takovéto body na čtverečkovaném papíře vyznačit nelze.

Úloha 5.6

Henry to samozřejmě po chvíli zjistil a sám se smál, jak dětem naletl na špek. A tak jim také vymyslel příklad. Do tabulky 6 x 5 políček napsal libovolně všechna přirozená čísla 1 až 30. Děti měly zjistit, v jakém políčku je jaké číslo. Na rozmístění se však mohly pětkrát zeptat, a to tak, že zadaly libovolnou množinu políček a Henry jim odpověděl, jaká čísla jsou v nich napsána (nikoliv však ve kterém políčku je jaké číslo). Matějovi se nakonec podařilo přijít na fígl, jak pomocí těchto pěti otázek vždy zrekonstruovat celou tabulku.

Dokázali byste to také?

Úloha 5.7

Když rodiče Koumy zjistili, jaký má chlívek ve svém pokoji, okamžitě ho zahnali, aby si uklidil. Kouma chtě nechtě musel jít. Při uklízení však našel zajímavou knížku a v ní tento příklad: Nechť a, b, c, d jsou celá čísla. Ukažte, že rovnice

$$x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$$

má nekonečně mnoho celočíselných řešení právě tehdy, když

$$a^2 - 4b = c^2 - 4d.$$

Velice rád by se pustil do počítání, ale musel uklízet.

Zvládli byste vyřešit tento příklad?

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno