# Zadání 4. série

Termín odeslání: 18. února 2008

**Úloha 4.1**

Kouma koupil Ňoumovi k Vánocům Rubikovu kostku. Strana kostky měří 10 cm. Když mu ji však chtěl zabalit do vánočního papíru, zjistil, že má k dispozici pouze čtvercový papír 30 x 30 cm. Může z tohoto papíru vystřihnout jeden souvislý díl, s nímž by mohl dárek obalit (zanedbejte nutné přesahy)?

**Úloha 4.2**

Matěj s Liběnkou seděli celí nedočkaví v pokojíku a čekali, kdy se konečně ozve cinkání zvonku a budou moci jít ke stromečku. Když se ono cinkání ozvalo, rychle běželi do obýváku, ale ve dveřích je zastavil Henry (zapomněl totiž zapálit svíčky na stromku) a řekl jim, že prý můžou ke stromečku, až určí hodnotu funkce $f$ v bodě 2008. Funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ je definovaná takto: Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ jsou splněny následující podmínky:

1. $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$,
2. $f(n) = 0$, pokud poslední cifra zápisu čísla $n$ v desítkové soustavě je 3,
3. $f(10) = 0$.

**Úloha 4.3**

Kouma s Ňoumou se na Silvestra sešli i se svými kamarády na chatě u Koumálků. Hráli různé hry a dávali si také zajímavé příklady. V jednom z nich měl Kouma najít nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že

$$999999 \cdot n = 11 \ldots 11$$

**Úloha 4.4**

Matěj s Liběnkou odjeli se třídou na lyžák. Byla to paráda. Zasněžené hory, stromy se prohýbaly pod sněhovými čepicemi, nádherná lyžovajda, po večerech pohodová nálada. Jedno dopoledne měli volné, a tak se vydali stavět sněhuláky. Soutěžili o nejkrásnější sněhovou stavbu. Matěj chtěl postavit krychlového sněhuláka. Když měl hotovou první obrovskou krychli, ptala se ho Liběnka, co prý to bude. Matěj odvětil, že jí to řekne, až mu odpoví na následující otázku: "Pokud všechny vrcholy této sněhové krychle ohodnotím 1 nebo -1 a každé stěně krychle přiřadím součin čísel jejích vrcholů, jaké budou všechny možné hodnoty součtů těchto 14 čísel (ze stěn a z vrcholů krychle)?"

### Úloha 4.5

No jo, to zase Ňouma seděl nad úkolem o něco déle než Kouma. Ten z toho byl už nervózní a chtěl s úkolem Ňoumovi pomoci, aby mohli jít konečně ven. Měli v plánu vyrazit na běžky a svítící sluníčko tomu úplně nahrávalo. Ňouma si na to však chtěl přijít sám. A tak, aby se Kouma nenudil, vymyslel pro něj příklad. Na papír mu nakreslil rovnostranný trojúhelník o straně $n \in \mathbb{N}$. Tento trojúhelník potom rozdělil trojúhelníkovou sítí na $n^2$ shodných rovnostranných trojúhelníků o straně 1, jejichž vrcholy budeme nazývat uzly. Vrcholy největšího trojúhelníku obarvil červeně, zbylé uzly obarvil zeleně. Kouma měl potom najít nejmenší $m \in \mathbb{N}$, pro které existuje $m$ přímek takových, že každý zelený uzel leží alespoň na jedné z nich a žádný červený uzel neleží na žádné z těchto přímek.

### Úloha 4.6

Když se Matěj s Liběnkou vraceli z lyžáku, většina jejich kamarádů v autobuse usnula. A tak se Liběnka pustila do řešení Hloupětínské olympiády. V prvním příkladu měla dokázat, že pro všechna $a, b, c > 0$ platí:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

### Úloha 4.7

Kouma s Ňoumou si náramně užívali zimní počasí. Po včerejším běžkování dnes hráli na zamrzlém rybníku hokej. Z dobrého rozpoložení je vyrušil místní porybný, který přišel vysekávat díry do ledu. A chtěl je udělat zrovna na místě, kde si Kouma s Ňoumou odklidili sníh. Kluci ho prosili, jestli by je nemohl udělat někde jinde, ale porybný se zdál být neoblomný. Nakonec však svolil, ale jen v případě, pokud mu vyřeší příklad, který dostala jeho dceruška za úkol a se kterým si nevěděla ani ona, ani její tatík rady. Měla dokázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ platí, že $128 \mid \left(n^{n^{n^n}} - n^{n^n}\right)$.

*Poznámka:* $a^{b^{c^d}} = a^{\left(b^{\left(c^d\right)}\right)}$, *takže např.* $2^{3^4} = 2^{81}$.

## Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno