Zadání 3. série

Termín odeslání: 7. ledna 2008

Úloha 3.1

Jednou Matěj pouštěl se svými kamarády venku draka, málo se oblékl a nastydl. V horečkách ulehl do postele a zdály se mu bláznivé sny. V jednom z nich se hádaly rovnoběžky s různoběžkami o to, kdo je vznešenější, krásnější, ušlechtilejší a také užitečnější. Zdálo se, že tuto bitvu různoběžky vyhrály, když vykřikly argument: Existuje snad v rovině konečná množina bodů s vlastností, že pokud z ní vybereme libovolné dva různé body A a B, potom v této množině existují různé body C a D, kde $\{A, B\} \neq \{C, D\}$, takové, že AB je rovnoběžná s CD ?

Když se Matěj probral z blouznění, vyprávěl tento sen Liběnce. Ta mu dokázala, že taková konečná množina vskutku existuje, tudíž argument různoběžek se obrátil proti nim.

Dokázali byste to také?

Úloha 3.2

Kouma s Ňoumou zrovna seděli u ohýnku, kde pálili natě po sklizni brambor. V popelu opékali brambory a už se těšili na tuto dobrůtku. Když však byly brambory hotové, našli jich chlapci pouze sedm. Začali se tedy hádat, kdo jich kolik dostane. Slyšel to pan Ňoumálek a rozsoudil je: Víc brambor dostane ten, kdo první dokáže, že některé z čísel $7, 77, 777, 7777, 77777, \ldots$ je dělitelné číslem 2007.

Dokázali byste to také?

Úloha 3.3

Když už Matěj během svého stonání přečetl všechny knížky Harryho Pottera, Bigglesse i Správných pětek, začal se strašlivě nudit. Naštěstí se akorát vrátila Liběnka ze školy a řekla mu, že si s ním půjde zahrát šachy. Matěje však klasické šachy nebavily, a tak začal vymýšlet různé ťulpachoviny. Liběnka mu zrovna dávala šach, když na ni Matěj vybafl s úlohou: Do šachovnice 8x8 polí jsou napsaná po řádcích čísla $1, 2, \ldots, 64$, tedy v prvním řádku jsou čísla $1, \ldots, 8$, ve druhém $9, \ldots, 16$ a v posledním $57, \ldots, 64$. Na šachovnici je rozmístěno 8 věží tak, že se žádné dvě neohrožují (věže se pohybují po řádcích a po sloupcích). Jakých hodnot může nabývat součet čísel polí, na kterých jsou věže umístěné?

Když se Liběnka zamyslela, Matěj zákeřně vyměnil figurky, aby se vymanil ze zapeklité situace.

Dokázali byste vyřešit příklad, který zadal Matěj Liběnce?

Úloha 3.4

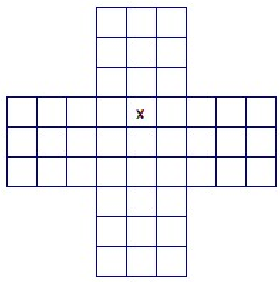
Henry Klevr se vracel domů z práce a nesl si v ruce jakýsi drátěný model. Když ho Matěj s Liběnkou spatřili, nechali šachy být a běželi se podívat, co Henry zajímavého donesl.

Byl to model rotačního kužele, kterému byla vepsána koule. Této kouli byl opsán válec tak, že podstavy kužele a válce ležely ve stejné rovině. Matěj s Liběnkou se hned ptali, k čemu to slouží? Henry pravil, že jim to prozradí, až dokáží, že objemy kužele a válce se nemohou rovnat, a ještě až také určí, jaká je nejmenší možná hodnota podílu objemů kužele a válce.

Poradili byste si i s tímto příkladem?

Úloha 3.5

Když se Kouma vrátil večer domů, zašel si zahrát Solitaire. Na každém políčku hrací plochy kromě centrálního je figurka. Hrát se může tzv. skákáním buď v horizontálním nebo ve vertikálním směru. Skákání spočívá v tom, že figurka ze stávajícího políčka přeskočí v jednom z výše uvedených směrů přes jednu figurku na volné políčko, přičemž přeskočenou figurku odstraníme z hrací plochy.



Je možné skončit hru s jedinou figurkou nacházející se na políčku označeném křížkem?

Úloha 3.6

Hmm, to Ňouma neměl na hry ani pomyšlení. Musel ještě udělat úkoly do školy. Měl najít všechna řešení rovnice $(n+1)^k - 1 = n!$, kde $n, k \in \mathbb{N}$.

Pomozte Ňoumovi vypočítat tento příklad.

Úloha 3.7

Henry se večer vydal do hospůdky povykládat s místními u pěnivého moku nejmenované značky hloupětínského piva. Když už měli pánové něco vypito, rozhodli se, že si půjdou zahrát kulábr, což je hra podobná našemu kulečníku, akorát se hraje na kruhovém kulečníkovém stole bez děr. Henry samozřejmě vyhrával a chlapy už to přestávalo bavit. A tak mu vymysleli zapeklitý úkol. Prý si s nimi další hru může zahrát až tehdy, co dokáže, že pokud koule projde nějakým bodem na stole třikrát, projde jím nekonečně mnohokrát (předpokládejte, že koule se od mantinelů stolu odráží tak, že úhel odrazu je stejný jako úhel dopadu a že se koule po uvedení do pohybu již nikdy nezastaví).

Podaří se vám dokázat i tento příklad?

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno