Zadání 2. série

Termín odeslání: 19. listopadu 2007

Úloha 2.1
Lenošínský hvězdář Marko Perník objevil na nebi zajímavé souhvězdí. Tvoří ho šestice hvězd Ajda, Bajda, Cajda, Dory, Fory a Gory. Marko si při pozorování všimnul, že Dory leží ve středu kružnice vepsané trojúhelníku, který má za vrcholy hvězdy Ajda, Bajda a Cajda. Dále Fory je středem kružnice připsané ke hvězdné straně Ajda-Cajda a Gory je středem kružnice připsané ke hvězdné straně Bajda-Cajda. Dále v tomto hvězdném trojúhelníku platí, že poměr velikostí úhlů při hvězdách Ajda a Cajda je roven poměru velikostí úhlů při hvězdách Bajda a Ajda, který je roven 2. Pomozte Markovi dokázat, že hvězdné trojúhelníky Ajda-Bajda-Cajda a Dory-Fory-Gory jsou podobné.

Úloha 2.2
Kouma přišel jednoho dne za Ňoumou se zajímavým příkladem. Měl danou čtvercovou síť s $(k+1) \times (k+1)$ body, kde k je přirozené číslo. Ňouma měl určit, kolik existuje čtverců s vrcholy v těchto bodech. Dokážete to také?

Úloha 2.3
Matěj s Liběnkou a dalšími kamarády vyhráli na závodech hlavní cenu - třípatrový oříškový dort pokladený čerstvým ovocem, zalitý želatinou, promazaný lahodným vanilkovým krémem a ozdobený loupanými mandličkami. Když si tuto slast chtěli rozdělit, zavelel Matěj, že každý z nich si musí vybrat různé přirozené číslo tak, aby každý z týmu mohl dostat tu část dortu, která odpovídá převrácené hodnotě jeho čísla. Dokažte, že takto mohli vždy rozdělit celý dort, tedy dokažte, že pro každé $n > 2$ existuje n různých přirozených čísel takových, že součet jejich převrácených hodnot je roven jedné.

Úloha 2.4
Desetinásobek druhé mocniny věku sestřičky Koumy je o 4 větší než rozdíl trojnásobku druhé mocniny věku Ňoumova brášky a sedminásobku součinu věku Koumovy sestřičky a Ňoumova brášky. Dokážete určit věk Koumovy sestřičky a Ňoumova brášky?

Úloha 2.5

Hned ze začátku školního roku se na Matěje s Liběnkou vrhli ve škole učitelé jako... No však víte, jak se to říká. Úkol za úkolem. A v matice obzvlášť. Už jim šla hlava kolem, zrovna naposledy měli zadaný tento příklad, co příklad, přímo dvojpříklad:

Bod M je libovolný vnitřní bod úsečky AB. Označme $AMCD$ a $MBEF$ čtverce ležící ve stejné polorovině určené přímkou AB. Dále označme N průsečík kružnic opsaných těmto čtvercům, $M \neq N$.

1. Dokažte, že se přímky AF a BC protínají v bodě N.
2. Dokažte, že přímka MN prochází pevným bodem, nezávislým na volbě bodu M.

Úloha 2.6

Ani Kouma s Ňoumou se ve škole nenudili. Měli za úkol dokázat, že existuje 2007 navzájem různých přirozených čísel takových, že součet libovolných dvou z nich je dělitelný jejich rozdílem. Pomozte to Koumovi a Ňoumovi dokázat.

Úloha 2.7

Lenošínsko-hloupětínského srazu chytrých hlav se zúčastnilo 289 nejlepších lenošínských a hloupětínských matematiků. Každý den byli rozděleni do 17 skupin po 17 matematicích tak, aby žádní dva nebyli spolu vícekrát v jedné skupince. Určete nejvyšší počet dní, po které mohla tato konference probíhat.

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno