Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Mějme tabulku čísel rozměrů 4×4. Pro každé políčko platí, že součet čísel na sousedních políčkách je roven 1 (dvě políčka sousedí právě tehdy, když mají společnou hranu). Jaký je součet všech čísel v tabulce?

   Řešení 1 *Stačí vhodně zvolit několik políček, jejichž sousedé budou (bez překrývání) pokrývat celou tabulku. Takových políček nám vyjde 6, proto součet všech čísel bude* $6.1 = 6$

2. Pokud je číslo v devítkové soustavě, je to $\overline{abc}$. Pokud je v šestkové, je to $\overline{cba}$. Jaké je v desítkové soustavě?

   Řešení 2 *Stačí abychom rozvinuli dané dva polyadické zápisy a dali je do rovnosti, když (například zkoumáním zbytkových tříd) vyloučíme všechny ostatní možnosti, zůstane nám jedině 212.*

3. Najděte všechna reálná a, b tak, aby čísla $a, 16, \sqrt{b}, a^2b$ tvořila v tomto pořadí geometrickou posloupnost. Zadejte součet součinů ab pro všechna řešení (a, b).

   Řešení 3 *Podíl dvou po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je konstantní (kvocient), na základě toho sestavíme dvě rovnice a z nich se dopracujeme k jedinému řešení:* $a = \frac{1}{4}$, $b = 1048576$, *výsledek tedy je* $a.b = 262144$.

4. Nechť $\overline{abcdeabcdeabcdeabcdeabcde}$ je decimální zápis nějakého čísla. Kolik čísel tohoto tvaru je dělitelných 2012?

   Řešení 4 *45*

5. Kolik různých obarvení pravidelného sedmiúhelníka můžeme vytvořit, pokud jeho strany obarvujeme 2 různými barvami? Sedmiúhelník můžeme otáčet a převracet.

   Řešení 5 *18*

6. Určete zbytek po dělení čísla 100011 číslem 1111, která jsou zapsána v soustavě se základem 2012.

   Řešení 6 *4025*

7. Digitální hodinky ukazují hodiny, minuty a sekundy (v 24-hodinovém formátu). Jak dlouhou dobu je během jednoho dne (24 hodin) na hodinkách alespoň jedna jednička? Výsledek zadejte v sekundách.

   Řešení 7 *62100=12.3600 + 12.15.60 +12.45.15*

8. Máme přirozené číslo n. Určete největší možnou poslední číslici čísla n^2, pokud je 7 předposlední číslice n^2.

   Řešení 8 *6*

9. Mějme čtverec $ABCD$, označme S průsečík jeho úhlopříček. Osa úhlu SAB protne BS a BC v bodech K a L. Délka KS je 18. Jaká je délka LC?

   Řešení 9 *36*

10. Určete nejmenší společný násobek čísel v magickém čtverci (součet čísel v řádcích, sloupcích a na diagonálách je stejný, doplňujeme přirozená čísla).

?	?	7
?	12	?
?	?	9

Řešení 10 *21420*

15	*14*	*7*
4	*12*	*20*
17	*10*	*9*

11. Nechť $\overline{XYYZ}$ je číslo zapsáno v desítkové soustavě. Určete rozdíl $\overline{ZYYX} - \overline{XYYZ} = \overline{7KLM}$, pokud $\overline{7KLM}$ představuje nějaké číslo v desítkové soustavě a $Z > X > 0$.

Řešení 11 *7992*

12. Najděte tři trojciferné čtverce tak, aby dohromady používali cifry 1, 2, 3 ..., 9 každou právě jednou. Výsledek zadejte jako jejich součet.

Řešení 12 *1674=361+529+784*

13. Kouma s Ňoumou plavali přes řeku (každý jinou, ale konstantní rychlostí) kolmo na směr proudu. Vystartovali proti sobě z protilehlých břehů a když procházeli kolem sebe, byli vzdáleni 6 metrů od levého břehu. Oba se po doplutí k břehu otočili a plavali dál. Když se setkali podruhé, byli vzdáleni 2 metry od pravého břehu. Jak široká (v metrech) je řeka?

Řešení 13 *16*

14. Určete poslední dvojčíslí čísla $1 + 1.2 + 1.2.3 + ... + 1.2.3...2012$.

Řešení 14 *13*

15. Mějme čtvercovou mřížku o rozměrech 2012×1024 (tedy mřížka obsahuje 2012×1024 vrcholů a 2011×1023 čtverců). Ze všech vrcholů je n zbarvených modře, přičemž platí, že žádné tři modré vrcholy nejsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, který by měl odvěsny rovnoběžné s hranami mřížky. Jaká je maximální možná hodnota n?

Řešení 15 *3034*$=2012 + 1024 - 2$

16. Loupežníci si rozdělili lup následovně: 100 dukátů a desetina zbytku šla prvnímu zbojníkovi, 200 dukátů a desetina zbytku druhému, 300 dukátů a desetina zbytku třetímu, atd.. Když skončili, první a druhý zjistili, že mají stejný počet dukátů. Kolik dukátů měl poslední zbojník?

    Řešení 16 *900*

17. Nechť $a(n)$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pro všechny přirozené x, y platí $a(x + a(y)) = a(x) + y + 1$. Najděte všechny možné hodnoty $a(2012)$. Výsledek zadejte jako součet všech možných rozdílných hodnot.

    Řešení 17 *2013*

18. Kolika způsoby můžeme posadit do řady 3 prváky, 3 druháky a 3 třeťáky tak, aby žádní tři studenti stejného ročníku neseděli vedle sebe?

    Řešení 18 *283824*

19. Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{\frac{6-x}{log_2(3-\sqrt{x})}}{log_2((3-x)(2-x)) + log_2(\frac{1}{x-3})}}$$

    Jako odpověď zadejte součin všech celých čísel, ve kterých je funkce definována.

    Řešení 19 *336 (pro x = 6, 7, 8)*

20. Náklaďák cestuje mezi městy X do Y. Do kopce jede rychlostí 56 km/h, po rovině 63 km/h a z kopce 72 km/h. Cesta z X do Y mu trvá 5 hodin, z Y do X 4 hodiny. Jaká je vzdálenost z X do Y a zpět (v kilometrech)?

    Řešení 20 *567*

21. Najděte nejmenší přirozené čislo které končí číslicí 6 přičemž po přehození této číslice z konce na začátek dostaneme čtyřnásobek původního čísla.

    Řešení 21 *Číslo zpětně rekonstruujeme - víme že na konci mělo 6, po vynásobení čtyřkou zjistíme předposlední číslici, atd., až přijdeme k výsledku153846*

22. Nechť K je množina o 10 prvcích. Kolik existuje čtveřic (A, B, C, D) takových, že A, B, C, D jsou podmnožiny K, A je podmnožinu B, B podmnožinou C a C podmnožinou D?

    Řešení 22 *9765625*$=5^{10}$

23. Určete zbytek po dělení čísla $1^{2012} + 8^{2012} + 17^{2012} - 3^{2012} - 6^{2012} - 7^{2012}$ číslem 10.

    Řešení 23 *0*

24. Matěj si byl na poště nechat vyplatit šek v eurech. Úředník se však spletl a vyměnil čísla, které vyjadřovaly počet eur a počet centů. Matěj později vytratil jednu 5-centovou minci a pak si uvědomil, že akorát má dvojnásobek částky, kterou měl původně dostat. Jaká byla původní částka na šeku? (Jedno euro má 100 centů.)

Řešení 24 *31.63*

25. Kolika různých hodnot z intervalu $\langle 1, 44\rangle$ může nabývat výraz $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$ pro nezáporná celá a, b, c, d, e?

Řešení 25 *31*

26. Trojúhelník o délkách stran $a \leq b \leq c$ má obsah 18 cm^2. Jaké nejmenší délky (v centimetrech) může nabývat strana b?

Řešení 26 *6*

27. Najděte největší (ve smyslu největšího součtu $p+q$) dvojici prvočísel p, q takovou, že $\binom{p}{2} + \binom{q}{2} = p^2$. Jako výsledek zadejte součet $p + q$.

Řešení 27 *5 (2+3)*

28. Určete nejvyšší počet čtverců, který se může objevit v posloupnosti $\{a^n.n\}_{n=1}^{100}$ pro vhodné přirozené a.

Řešení 28 *10*

29. Najděte všechny množiny takové, že součet prvků množiny je rovný 200 a zároveň jsou všechny prvky po sobě jdoucí přirozená čisla. Jako výsledek zadejte součin nejmenších prvků těchto množin.

Řešení 29 *38000=200*5*38*

30. Nech M je množina $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} ... \frac{1}{299}\}$. Z množiny vyberieme niektoré dve čísla x, y a nahradíme ich čislom $x + xy + y$. Tento postup potom opakujeme, až kým v množine nezostane len jeden prvok. Aké hodnoty môže nadobúdať tento posledný prvok? Výsledok uveďte ako súčet všetkých možných rozdielnych výsledkov.

Řešení 30 *299*

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Dobrodruh našel kouzelný pytel. S pravděpodobností 1/3 z něj vytáhne 3 zlaťáky, s pravděpodobností 1/3 z něj nevytáhne nic a s pravděpodobností 1/3 z něj vytáhne další naprosto stejný kouzelný pytel. Poté, co dobrodruh dvakrát sáhne do pytle, pytel se vypaří. Jaký je očekávaný zisk dobrodruha (Kdyby bylo dobrodruhů nekonečně mnoho, kolik by si průměrně vydělali.)?

    Řešení 31 *6*

32. Do obdélníku o rozměrech $a = 2$, $b = 3$ jsou vepsány dvě shodné kružnice, které se navzájem dotýkají. Jaký největší mohou mít poloměr? Výsledek zadejte zaokrouhlený na 4 desetinná místa.

    Řešení 32 *0.7679*$=\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$

33. Mějme posloupnost $s_0(n) = n$. Zaveďme obecně posloupnosti $s_{k+1}(n) = s_k(1) + s_k(2) + ... + s_k(n)$ (tedy například $s_1(n) = s_0(1) + s_0(2) + ... + s_0(n)$). Najděte $s_{2012}(3)$.

    Řešení 33 *2029105* $= \binom{2015}{2013}$

34. Najděte všechny trojice prvočísel splňující $11a^2 + 14b^2 = 9c^2$. Zadejte součet součinů abc pro všechna řešení (a, b, c).

    Řešení 34 *45*

35. Najděte všechna přirozená a, b taková, že počet možností, jak vybrat dva prvky z a prvků bez ohledu na pořadí, je b-tou mocninou šestky. Zadejte součet součinů ab pro všechna řešení (a, b).

    Řešení 35 *22*

36. Je dán 2012-boký jehlan. Označme A, B dva sousední vrcholy v podstavě. Kolika způsoby se můžeme po hranách jehlanu přesunout z vrcholu A do vrcholu B, jestliže smíme každý vrchol navštívit nejvýše jednou?

    Řešení 36 *2023068*

37. Úsečka $|XY| = 2$ je úhlopříčkou čtverce a zároveň (nejdelší) úhlopříčkou pravidelného šestiúhelníku. Jaký je obsah průniku daného čtverce a šestiúhelníku? (Výsledek zaokrouhlete na 4 desetinná místa.)

    Řešení 37 *1.9641*

38. Kolik členů obsahuje výraz $(a + b + c + d + e)^{2012}$?

    Řešení 38 *686210845320* $= \binom{2016}{4}$

39. Kolik je posloupnost nezáporných celých čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňujících $a_{n+10} = a_n$ a $a_{n^2} = a_n^2$ pro všechna přirozená n?

    Řešení 39 *16*

40. Kouma s Ňoumou stáli při sobě otočení navzájem zády vedle kolejnice. Když byl začátek projíždějícího vlaku právě na jejich úrovni, oba začali kráčet vodorovně s kolejnicí, Ňouma ve směru jízdy, Kouma proti směru. Oba zastali ve chvíli, když kolem nich prošel konec vlaku. Ňouma prošel celkem 22 metrů, Kouma 20. Kolik metrů byl dlouhý vlak? (Předpokládáme že Kouma s Ňoumou kráčeli stejně rychle a vlak šel celou dobu stejnou rychlostí.)

Řešení 40 *440*

41. Uvažme číslo, které vznikne zapsáním čísel od 1 po 1024 za sebe, tedy 12345678910111213...10231024. Určete číslici nacházející na 2012. pozici.

Řešení 41 *0*

42. Číslo $187k^3$ má 187 dělitelů. Kolik dělitelů může mít číslo $22k^{22}$? Výsledek uveďte jako součet všech rozdílných možností.

Řešení 42 *30104=(67*112*2)+(68*111*2)*

43. K dispozici máme mince o hodnotě 1, 5, 10, 25 a 50 centů a minci s hodnotou jednoho tolaru, přičemž platí že jeden tolar je 100 centů. Jaké je nejmenší k takové, že nelze vybrat k mincí, které by dohromady dávaly tolar?

Řešení 43 *77*

44. Nechť f je funkce, která přiřadí přirozenému číslu součin jeho cifer. Najděte $f(1)+f(2)+...+f(2012)$.

Řešení 44 *184320*

45. Mějme lichoběžník o délkách stran 5, 5, 5, a ($a \in \mathbb{N}$). Pro jakou hodnotu a má lichoběžník největší obsah?

Řešení 45 *10*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.
`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`