



Zadání 3. série

KOMBINATORICKÁ GEOMETRIE

Termín odeslání: 9.1.2017



autor: *Minh a Honza*

Úloha 3.1. Henry vzal své dvě ratolesti na výlet. Jako ostatně každý jejich výlet, i tento začal u dobrého jídla. Objednali si obrovskou pizzu a než se Henry stihl pohodlně usadit, Liběnka s Matějem už měli většinu pizzy v sobě a na talíři zůstal jen jeden kousek ve tvaru trojúhelníku (jak jinak), na němž bylo 9 (fakt malých, asi jako bod) oliv. A tak Henry, aby na něj zbylo alespoň něco, úkoloval své děti: „Dokažte, že spojením některých tří oliv získáte trojúhelník o obsahu nanejvýš $1/4$ zbylé pizzy.“ Dokážete to taky?

Úloha 3.2. Po dobrém jídle mohla rodinka konečně vyrazit na výstavu o Egyptě, která se právě konala v nedalekém Lenošíně. Šli a šli a šli a najednou. . . Matěj se zastavil. Zaujal ho kanál. On to totiž nebyl ledajaký kanál! Byla to celočíselná mřížka a na ní 5 žabek. „Hele Liběnko!“ zakřičel Matěj. „Na tom kanálu jsou žabky rozsazené tak, že jejich spojením dostaneme konvexní pětiúhelník!“ „To je toho,“ usklíbala se Liběnka koukajíc na roztomilé obojživelníky, „mnohem zajímavější je, že jeho obsah je alespoň $5/2$.“ Dokážete dokázat Liběněno tvrzení?

Úloha 3.3. Po zoologickém zážitku pokračovali dál. Cesta ubíhala pomalu, tak jako správní turisté hráli různé hry. Dokonce s sebou měli i cestovní šachovnici. Henry se na ni zamyšleně zadíval a pak dal dětem tuto hádanku: „Ukažte, že šachovnice $n \times n$ lze pokrýt dílky $1 \times m$ právě tehdy, když m dělí n .“

Úloha 3.4. Henry s Matějem a Liběnkou konečně dorazili na výstavu. Vstupné bylo dobrovolné, proto lidé zanechávali své mince na kruhovém stole s průměrem dva metry. Liběnka si všimla, že je na něm přesně 60 mincí libovolně rozmístěných. „Hmmm. . .“, pomyslela si, „teď už jen dokázat, že na okraji stolu existuje takový bod, že součet jeho vzdáleností od středů všech 60 mincí je menší nebo roven 80 m.“

Úloha 3.5. Další výstava byla věnovaná kouzelnému světu pohádek, což bylo něco pro Liběňku. Matěj se tvářil znuďeně, ale ožil, hned jak uviděl voskové figuríny sedmi trpaslíků. Stáli totiž v řadě "cik-cak", vyšší, nižší, atd. Obrátil se na Liběňku: „Mám pro tebe příklad, který nespočítáš. Sedm trpaslíků jde v řadě do dolu, a to tak, že výška žádných tří po sobě jdoucích trpaslíků netvoří rostoucí posloupnost. Trpaslíci jsou po dvou různě vysokí a nechce se jim chodit v pořadí, které již jednou použili. Kolik dnů jim to vydrží? A co když se přidá Sněhurka?“

Úloha 3.6. Matěj i Liběnka byli zaměstnaní, proto měl Henry konečně nějaký čas i pro sebe. Celou tu dobu se těšil hlavně na pyramidy. Když k jedné přišel, uviděl vedle ní na stěně starodávnou hádanku přeloženou z hieroglyfů. Pravděpodobnost, že Kněz odpoví správně na otázku zjišťovací je a . Pravděpodobnost, že kněžka odpoví správně je k ,

pravděpodobnost, že voják odpoví správně je v . Na oslavě se sešli Kněz, několik kněžek a připletlo se i několik vojáků. Pravděpodobnost, že s Knězem bude další náhodně vybraná osoba souhlasit je $1/2$. Jaký je poměr kněžek a vojáků na oslavě?

Úloha 3.7. V rohu na druhé straně místnosti se krčila malá smutná sfinga Florentýnka. Liběnka zrovna dořešila problém s mincemi a všimla si jí. „Co se ti stalo maličká? Ztratilas něco?“ Zeptala se Liběnka malé roztomilé sfingy. „Nedaří se mi najít jeden trojúhelník. Podívej – je dán trojúhelník **pravoúhlý** ABC . A já mám najít, pouze pomocí pravítka a kružítka, **rovnostranný** trojúhelník KLM takový, že K, L, M leží po řadě na BC, CA, AB a ze všech takovýchto trojúhelníků má nejmenší možná obsah. Pomůžeš mi?“ Pomozte malé sfinze najít její trojúhelník.

Bonusová úloha. Už se pomalu blížila zavíračka, a tak se Henry, Matěj i Liběnka sešli u východu. Florentýnce bylo líto, že už odcházejí, proto se chtěla ještě rychle rozloučit. Všechny objala a pak jim ještě dlouze vyprávěla o tom, jak je matematika důležitá pro lidstvo. Když rodinka dorazila domů – a byla to náročná cesta – nikdo už si nepamatoval, o čem přesně Florentýnka mluvila, a bylo jim to moc líto, protože si pamatovali, že to rozhodně bylo moc zajímavé. Vaším úkolem tedy je sepsat, co asi Florentýnka Henrymu, Matějovi a Liběnce na odchodu říkala.

Svá řešení posílejte na adresu:

BRKOS

Přírodovědecká fakulta MU

Kotlářská 2

611 37 Brno

nebo uploadujte na našich stránkách:

<http://brkos.math.muni.cz/>