



Zadání 5. série  
**ČÍSELNÉ OBORY**

Termín odeslání: 2. dubna 2012

autor: *Matej a Zbyněk*



**Úloha 5.1.** V Hloupětíně otevřeli nové muzeum, což si Matěj s Liběnkou nemohli nechat ujít. Zastavili se už u první vitríny, v níž byly vystaveny všechny nerostoucí posloupnosti přirozených čísel. Na první pohled bylo zřejmé, že jich tam je nekonečně mnoho, ale děti velmi zajímalo, zda jich je spočetně. Dokázali byste jim poradit?

**Úloha 5.2.** Ňouma s Koumou také nemohli u otevření muzea chybět. Narozdíl od Klevrových je ale víc zaujala výstava logaritmů. Koumu nejvíc uchvátil  $\log_2 3$ , Ňoumu zase  $\log_3 4$ . A kluky by teď zajímalo, jestli je součet jejich čísel racionální. Dokážete jim poradit?

**Úloha 5.3.** Mezitím Matěj s Liběnkou došli k dalšímu exponátu. Byla to sbírka kosinů. Kromě těch známých, jako je  $\cos \frac{\pi}{6}$  tam byl i jeden, který se Matějovi obzvláště líbil. Byl to  $\cos \left( \frac{\pi}{2^{2012}} \right)$ . Chvilí si jej prohlížel a pak se otočil k Liběnce: „Schválně, uměla bys dokázat, že to je algebraické číslo?“

**Úloha 5.4.** Ňouma s Koumou došli do oddělení přirozených čísel. Našli tam jedno opravdu dlouhé číslo  $T$  – bylo zapsáno v desítkové soustavě, mělo ciferný součet 2011 a končilo čtyřčíslicí 2012. Kouma hned začal Ňoumu pošťuchovat: „Schválně, jestli dokážeš, že existuje mocnina  $T^k$  taková, že v pětkové soustavě začíná na 2011 a ve trojkové na 2012.“

**Úloha 5.5.** Do muzea se přišel podívat i Henry. Jako zasloužilého geometra ho nejvíce zaujaly mnohoúhelníky. Hloupětín se pyšnil sbírkou konvexních šestiúhelníků, z nichž každý byl složen ze shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Henryho hned zajímalo, pro jaké počty trojúhelníků je možné takový šestiúhelník sestrojít. Poradíte mu?

**Úloha 5.6.** Hned vedle šestiúhelníků byly vystaveny čtyřúhelníky. Jeden z nich měl úhlopříčky dlouhé 6 a 8 palců. Dokázali byste určit, jakou nejmenší délku mohla mít jeho nejdelší strana?

**Úloha 5.7.** Ňouma s Koumou se v oddělení přirozených čísel ještě chvíli zdrželi. Součástí výstavy totiž byl i jeden rekordman. Největší přirozené číslo takové, že žádná jeho část (tj. žádné číslo tvořené po sobě jdoucími ciframi původního čísla) není třetí mocninou celého čísla. Jak dlouhé je takové číslo?