



Zadání 4. série

# PRAVDĚPODOBNOST

Termín odeslání: 20. února 2012

autor: *Emu a Bzzzučík*

**Úloha 4.1.** Pomalu už končí zima, venku jsou poslední hromádky sněhu a Matěj s Liběnkou sedí vevnitř u televize a náhodně sestavují čísla z číslic 1, 3, 5, 6, 8, 9 (každá je použita nejvýše jednou). Matěj sestavuje šesticiferná, Liběnka pěticiferná a přitom se hádají, kdo má větší pravděpodobnost, že jeho číslo bude dělitelné jedenácti. Dokážete jejich rozepří rozetnout a určit obě pravděpodobnosti?

**Úloha 4.2.** S vaší pomocí se jim našťěstí úloha podařila vyřešit a oba sedí spokojeně v kuchyni a čekají, až Henry dokuchtí nějaké jídlo a mezitím Liběnka povídá, že četla včera v novinách, že vědci z Jamajky vyvinuli novou kontrolku v autě, která hlásí zledovatělou silnici. Na zledovatělé silnici se rozsvítí s pravděpodobností 0,999, s pravděpodobností 0,005 však signalizuje ledovou silnici, i když ledová vůbec není. Silnice na Jamajce jsou ledové s pravděpodobností 0,003. Matěji, jaká je pravděpodobnost, že pokud bliká kontrolka, jde o planý poplach?

**Úloha 4.3.** Matěj chce také zabodovat a tak si také donese pytlík a řekne, že v pytlíku je 2012 míčků, z toho 20 červených, 2 modré a ostatní jsou zelené. Vy si teďka budete náhodně tahat míčky z mého pytlíku a vždycky je zase vrátíte zpátky. Pokud bude vytažen modrý míček, vyhraje Henry a pokud bude dvakrát za sebou vytažen červený míček, pak vyhraje Liběnka. Míčky budete vytažovat tak dlouho, dokud jeden z vás nevyhraje. Kdo má větší pravděpodobnost, že vyhraje - Liběnka nebo Henry? A jaká je tato pravděpodobnost?

**Úloha 4.4.** Henry už mezitím připravil to jídlo, na které se děti tak těšily a sedl si k nim ke stolu. Děti, dneska bude jídlo trochu jiné. Připravil jsem dva pytlíky s buchtami. V každém pytlíku je přesně  $n$  buchet. Vy si nyní budete náhodně vybírat z pytlíků po jednom buchtu a jakmile jeden z vás šáhne do pytlíku a už v něm žádná buchta nebude, tak zbylé buchty v pytlíku druhém zůstanou mně. Jaká je pravděpodobnost, že mi v tom druhém pytlíku zbyde právě  $k$  buchet? (Matěj s Liběnkou nejsou žádní nenažranci a sobci, takže z pytlíků opravdu vybírají náhodně a nejde jim o to, aby měli co nejvíce buchet nebo naopak aby Henrymu zbylo nejvíce buchet.)

**Úloha 4.5.** Kouma si už zase něco koumá a Ňouma se naopak v něčem ňoumá. A víte, že mají oba tu samou matematickou úlohu? Dostali totiž od rodičů dokázat, že pro každé přirozené číslo  $n$  je číslo  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4n - 1) \cdot 4n$  dělitelné číslem  $24 \cdot 48 \cdot \dots \cdot (24n - 24) \cdot 24n$ . A vy se v tom budete ňoumat nebo to vykoumáte?

**Úloha 4.6.** Protože Hloupětínští jsou sice hrozně hloupí, ale zato velice hraví, rozhodli se, že si místní kašnu ozdobí. První přišel a namaloval na kašnu rovnoramenný trojúhelník  $ABC$ . Druhý ho vystřídal a sestrojil kružnici se středem  $C$  a poloměrem  $r$ . Třetí měl zase moc rád tečny, a tak vytvořil tečnu z vrcholu  $A$  k této kružnici. Čtvrtý se rozhodl, že se mu nesymetrický obrázek nelíbí a domaloval ještě tečnu v bodě  $B$ . Pak přišel jeden návštěvník z Lenošína a začal moc pěkně počmáranou kašnu obdivovat. Byl totiž tak líný, že by ho nikdo nikdy nedonutil něco na kašnu kreslit. Ale protože nebyl vůbec hloupý, dokázal si najít množinu všech průsečíků těchto tečen, které mohli druhý, třetí a čtvrtý kreslíř získat, jestliže poloměr  $r$  mohli volit jak chtěli (za podmínky  $r < |CA|$ , jinak by přeci tečny neexistovaly) a pro každý z vrcholů  $A, B$  si mohli vybrat libovolnou z tečen. A vy to jistě také zvládnete, nebo ne?

**Úloha 4.7.** Víte, že Kouma s Ňoumou rádi řeší soustavy rovnic? Jenže o tuhle se tak pohádali, kdo ji bude řešit, až ji roztrhli a tak měl Kouma na papíře pouze rovnici

$$ux + vy = x^2 + xy$$

a Ňouma měl zbylé dvě

$$\begin{aligned} vx + uy &= y^2 + xy, \\ xy + uv &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Jeden druhému je nechtěli ukázat a tak tento příklad ani jeden z nich nevyřešil, a tak vy můžete být první, protože znáte obě části! Dokažte, že všechny řešení této soustavy v oboru reálných čísel jsou tvaru  $x = y = u = v$ .

**Svá řešení posílejte na adresu:**

BRKOS  
Přírodovědecká fakulta MU  
Kotlářská 2  
611 37 Brno

**nebo uploadujte na našich stránkách:**

<http://brkos.math.muni.cz/>