



Zadání 1. série

Termín odeslání: 22. října 2007



Úloha 1.1

V letních vedrech se dva lenošínští kamarádi Kouma Ňoumálek a Ňouma Koumálek vypravili koupat na tamní přehradu Faulín. Kouma si všiml, že délka hráze byla druhou mocninou počtu labutí hnízdících v rákosí na jednom břehu přehrady. Ňouma dodal, že pokud by vymazali poslední dvě cifry čísla vyjadřujícího délku hráze, dostali by druhou mocninu počtu rybářů, kteří toho dne u přehrady zkoušeli štěstí. Navíc délka hráze nebyla dělitelná číslem deset. Po návratu domů se Kouma podělil o tento zajímavý poznatek s rodiči. Bohužel si však nemohl vzpomenout, kolik labutí a rybářů u přehrady bylo. I přesto dokázal pan Ňoumálek určit všechny možné délky přehradní hráze. Kouma nevěřicně zíral a dodal, že správná byla ta největší z těchto možností. Dokážete určit délku hráze?

Úloha 1.2

Když se Matěj jednoho deštivého dne začel do Velké knihy hloupětínských pohádek, objevil tam jednu velice zajímavou. Zlý čaroděj Zlovous Zlovousý uvěznil princeznu Ťupkulupku ve zvláštním žaláři. Měl tvar krychle o délce hrany n a byl rozdělen na n^3 stejných krychlových místností o délce hrany 1, n přitom bylo liché přirozené číslo větší než 1. Princ Lupkoťapka se vydal princeznu osvobodit. Do žaláře šlo vstoupit pouze jeho vrcholovými místnostmi. V momentě, kdy princ do žaláře vstoupil, nacházela se princezna v místnosti ležící uprostřed celého žaláře. Každé dvě sousední místnosti byly spojeny dvojicí dveří (za sousední místnost se považovaly ty, které měly společnou stěnu). Jedněmi dveřmi se do místnosti vcházelo a druhými vycházelo. Všechny dveře se v pravidelných intervalech otevíraly najednou a pouze na chvíli, přičemž princ i princezna vždy možnosti přemístit se do sousední místnosti využili. Mohla mít tato pohádka happy end, tedy mohli se princ s princeznou setkat v téže místnosti?

Úloha 1.3

Během letních měsíců jezdí Lenošínští i Hloupětínští rádi na dovolenou. Lenošínští v touze po opalování na pláži putují do Hloupětína, zatímco

Hloupětínští se raději vydávají objevovat krásy přírody do hor v okolí Lenošína. Je to již dlouho, co mezi oběma městy pendluje autobus Bouca, který rád svezde každého, kdo si dokáže poradit s jednoduchou úlohou. Pomozte Matějovi a Liběnce vyřešit příklad, který jim Bouca zadal, když se chtěli vydat do Lenošína. Měli dokázat, že pokud p a $2^p + p^2$ jsou prvočísla, potom i $5p + 82$ je prvočíslo. Dokážete to i vy?

Úloha 1.4

Také obyvatelé Lenošína museli před cestou do Hloupětína vyřešit jeden příklad. A tak se Koumovi Ňoumálkovi a Ňoumovi Koumálkovi přihodilo, že se potýkali s touto úlohou: "Nechť $ABCD A' B' C' D'$ je krychle. Nechť X je libovolný bod úsečky AC a Y je libovolný bod úsečky $B' D'$. Naleznete množinu všech středů úsečky XY ." Dokázali byste se podobně jako Kouma s Ňoumou dostat do Hloupětína?

Úloha 1.5

To si takhle Matěj s Liběnkou jednoho krásného letního dne lebedili v houpačích sítích, zavěšených mezi kmeny statných ořešáků, které jim ještě navíc poskytovaly stín před dotírajícím sluncem, a hráli hru polynomíkování. Matěj vždycky zadal nějakou vlastnost a Liběnka hledala všechny polynomy, které zadanou vlastnost mají. Tak například dal Matěj Liběnce za úkol najít všechny polynomy $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (tedy polynomy proměnné x s reálnými koeficienty), pro něž platí, že $P(x^2) = (P(x))^2 - 2x$. Pomozte je Liběnce najít.

Nápověda: Polynomem s reálnými koeficienty je například $P(x) = x^2 + 5x + 3$. Potom $P(x^2) = (x^2)^2 + 5x^2 + 3 = x^4 + 5x^2 + 3$. Samotná reálná čísla jsou také polynomy, kterým se říká konstantní polynomy.

Úloha 1.6

Za dávných časů, když ještě v Lenošíně panovala doba uvolněných mravů, rozhodl se s tím tehdejší panovník něco udělat a promluvil ke svému lidu: "Velevázení mužové, v našem městě se děje něco strašného, některé ženy jsou svým manželům nevěrné. To nemůžeme tolerovat. Každý muž musí zapojit své mozkové závity, aby zjistil, zda mezi nevěrnými není i jeho manželka. Kdo zjistí, že jeho choť nevěrná je, co nejdříve ji vyžene. Abychom však odradili od nevěry ty ženy, které zatím sekají dobrotu, bude vyhánění těch nevěrných probíhat vždy najednou a před celým městem. Za tímto účelem bude od zítřka každý večer v 5 hodin na krátkou chvíli otevřena východní brána města." Každý muž věděl o každé ženě krom své vlastní, zda je věrná, či ne, a také věděl, že i všichni ostatní muži jsou podobně "informováni".

Ve městě bylo n nevěrných manželek, nebyla možná polygamie a nikdo by si nedovolil porušit nařízení panovníka. Kolikátý den po tomto proslovu byly všechny nevěrné manželky z města vyhnány?

Úloha 1.7

Kouma s Ňoumou se jednoho letního dne šíleně hádali. Když už byli ve při hodně dlouho, uvědomil si Kouma, že to trochu přepískl, a začal se Ňoumovi omlouvat. Ten však ve zlosti pravil, že mu odpustí, teprve až dokáže, že pro všechna přirozená čísla n má číslo $(5 + \sqrt{26})^n$ prvních n cifer za desetinnou čárkou stejných. Pomozte klukům se usmířit.

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Kotlářská 2
611 37 Brno